Le théorème de Fagnano : le cas obtus

La preuve du théorème de Fagnano dans le cas obtus n'est pas difficile si l'on veut bien croire ce que dit la figure. Sinon, il faut s'attendre à devoir faire quelques efforts ! Une bonne référence[1] sur tout ce qui concerne les polygones est le livre *Mathématiques d'École*, Cassini, 2006.

1. Un lemme.

Le lemme suivant sera utilisé uniquement dans le cas du quadrilatère.

Lemme 1. *Soit $\mathcal{P} = A_1 \dots A_n$ un polygone (pas nécessairement convexe) et soit M un point intérieur à $\mathcal{P}$. On a l'inégalité $A_1M + MA_n \leq A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$.*

Démonstration. On considère la demi-droite $[A_1M)$. Elle coupe le bord de $\mathcal{P}$ en un point N tel que M soit situé entre A_1 et N, et que N soit dans $[A_iA_{i+1}]$, avec $1 < i < n$, voir ci-dessous Lemme 3 pour des précisions. On a donc, par l'inégalité triangulaire, $A_1M + MA_n \leq A_1M + MN + NA_n = A_1N + NA_n$. Mais, toujours par l'inégalité triangulaire (sous sa forme : la ligne droite est plus courte qu'une ligne brisée), on a $A_1N \leq A_1A_2 + \cdots + A_{i-1}A_i + A_iN$ et $NA_n \leq NA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + \cdots + A_{n-1}A_n$, d'où le résultat en additionnant.

2. Le théorème de Fagnano.

Théorème 2. *Soit ABC un triangle dont l'angle en A est obtus. Soient M, N, P trois points situés respectivement sur les segments $[BC], [CA], [AB]$. Le périmètre du triangle MNP est minimal lorsque l'on a $N = P = A$ et lorsque M est le pied H de la hauteur issue de A.*

Démonstration. Soit MNP un triangle comme dans l'énoncé. On construit, comme dans le cas usuel, les symétriques Q et R de M par rapport à (CA) et (AB) respectivement. On a $MN + NP + PM = QN + NP + PR$. Comme A est intérieur au quadrilatère $QNPR$ (voir ci-dessous, Lemme 4), le lemme 1 donne l'inégalité $QA + AR \leq QN + NP + PR$. Mais, par symétrie, on a $QA = AR = AM$. On voit que le périmètre du triangle MNP est supérieur ou égal à $2AM$ et, *a fortiori*, à $2AH$.

3. Les détails.

Pour les gens de peu de foi qui ne croient pas en la figure, voici des preuves :

[1] Excellente même !

Lemme 3. *Avec les notations du lemme 1, la demi-droite $[A_1M)$ coupe le bord de $\mathcal{P}$ en un point $N \in [A_iA_{i+1}]$, avec $1 < i < n$, et M entre A_1 et N.*

Démonstration. Dans le cas d'un polygone quelconque, il faut savoir des choses, essentiellement que la ligne polygonale $(A_1 \dots A_n)$ partage le plan en deux composantes connexes dont elle est la frontière commune, l'intérieur et l'extérieur du polygone. On considère la droite (A_1M) et ses deux demi-droites opposées $[Mx) = [MA_1)$ et $[My)$. Comme le point M est intérieur et que la demi-droite $[My)$ rencontre l'extérieur de $\mathcal{P}$, elle rencontre le bord de $\mathcal{P}$ en (au moins) un point N (c'est de la connexité, on appelle ça le lemme de passage des frontières). De plus, M est entre A_1 et N puisqu'ils sont sur des demi-droites opposées issues de M. Le point N ne peut être sur $[A_1A_2]$ ni sur $[A_1A_n]$ sinon, M, qui est entre A_1 et N, serait sur $[A_1A_2]$ ou $[A_1A_n]$ et ne serait pas intérieur. Il est donc sur l'un des $[A_iA_{i+1}]$, avec $1 < i < n$.

Dans le cas d'un triangle ABC on peut facilement montrer le lemme uniquement avec des arguments de demi-plans. Pour un quadrilatère, j'imagine que si l'on me menaçait de tortures raffinées, j'arriverais sans doute à écrire un preuve directe du résultat.

Lemme 4. *Avec les notations de la preuve du théorème 2, le quadrilatère $QNPR$ est non croisé et le point A en est un point intérieur.*

Démonstration. Il faut montrer que le quadrilatère est non croisé, c'est-à-dire que ses côtés opposés ne se rencontrent pas, sinon la notion d'intérieur n'a pas de sens. En revanche, on vérifie avec Cabri qu'il n'est pas nécessairement convexe.

Montrons d'abord que $[PR]$ et $[QN]$ ne se coupent pas. En fait, les secteurs saillants $\widehat{BAR}$ et $\widehat{CAQ}$ ne se rencontrent pas. Sinon, si I était commun à ces deux secteurs, la somme des deux angles $\widehat{MAI}$ (celui qui contient $[AB]$ et celui qui contient $[AC]$) serait égale à 2π, donc on aurait $\widehat{MAR} + \widehat{MAQ} \geq 2\pi$. Or on a $\widehat{MAR} + \widehat{MAQ} = 2\widehat{MAP} + 2\widehat{MAN} = 2\widehat{BAC} < 2\pi$.

Montrons ensuite que $[PN]$ et $[QR]$ ne se coupent pas. Il suffit de voir que le segment $[QR]$ est extérieur au triangle ABC. Il est clair que Q et R sont extérieurs au triangle et même qu'ils sont dans l'angle rentrant $\widehat{BAC}$. Si $[QR]$ contenait un point intérieur au triangle, il couperait donc les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ en des points S et T. L'angle saillant $\widehat{RAQ}$ s'écrirait alors $\widehat{RAQ} = \widehat{RAS} + \widehat{SAM} + \widehat{MAT} + \widehat{TAQ} = 2\widehat{SAM} + 2\widehat{MAT} = 2\widehat{BAC}$. Mais, comme $\widehat{BAC}$ est obtus l'angle $\widehat{RAQ}$ serait $> \pi$ ce qui est impossible pour un angle saillant.

Il reste à montrer que A est intérieur à $QNPR$. Il suffit pour cela de montrer que la demi-droite $[AM)$ coupe le bord du quadrilatère en un unique point. Comme elle coupe $[PN]$ et seulement $[PN]$, c'est clair.