Petit problème de géométrie

Je rappelle le problème, dit à ma manière.

Soit $ABCD$ un parallélogramme, I un point de (BD), J le symétrique de C par rapport à I, K (resp. L) l'intersection de (AB) (resp. (AD)) avec la parallèle à (AD) (resp. (AB)) passant par J. Alors, I, K, L sont alignés.

1 Une preuve vectorielle

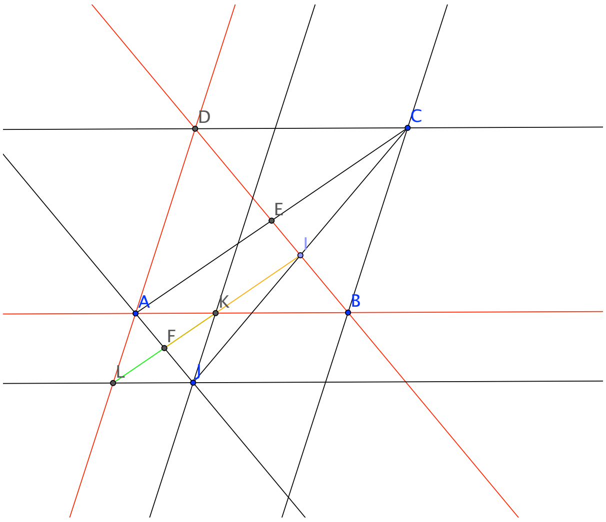

Figure 1 –

Voici une démonstration vectorielle. On considère les centres E et F des parallélogrammes $ABCD$ et $AKJL$. On va montrer que les droites (FI) et (LK) sont parallèles à (AC). Comme elles ont F en commun, on aura fini.

Pour (FI) c'est facile car c'est une droite des milieux de AJC. (Si l'on veut, on le dit vectoriellement : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{FJ} + 2\overrightarrow{JI} = 2\overrightarrow{FI}$.)

Pour (LK), on note d'abord que (AJ) est parallèle à (EI), donc à (BD). C'est encore la droite des milieux, mais dans CAJ cette fois. Ensuite, on établit le lemme suivant :

1.1 Lemme. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles (non aplatis, évidemment) qui ont tous leurs côtés deux à deux parallèles ((AB) parallèle à $(A'B')$, etc.) Alors, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait $\overrightarrow{B'C'} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C'A'} = \lambda\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$.*

Démonstration. On écrit $\overrightarrow{B'C'} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C'A'} = \mu\overrightarrow{CA}$, d'où $\overrightarrow{B'A'} = \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{CA} = \nu\overrightarrow{BA} = \nu\overrightarrow{BC} + \nu\overrightarrow{CA}$ et on conclut par l'indépendance[1] des vecteurs

1. On ne dit pas comme ça en seconde, bien sûr.

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$

Pour finir, ici, on peut appliquer ce lemme aux triangles ABD et LJA. On a donc $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{LJ}$, $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{LA}$, donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{LK}$ et la conclusion.

2 Variante projective

Cet exercice est un cas particulier d'un résultat projectif que j'explicite maintenant.

2.1 Rappels

Je ne donne ici que les grandes lignes, sur tous ces points voir, sur ma page web :
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie1.pdf`

2.1.1 Birapport

Entre deux droites projectives $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, on dispose de morphismes appelés homographies. Étant donnés deux triplets A, B, C et A', B', C' de points distincts de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement, il existe une unique homographie $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'. Mais avec quatre points il y a une condition nécessaire et suffisante qui est l'égalité des birapports $[\![A, B, C, D]\!] = [\![A', B', C', D']\!]$. Le cas du birapport -1 est celui de la division harmonique.

2.1.2 Perspectives

Si on a deux droites distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan et un point O non situé sur ces droites, l'application qui à $M \in \mathcal{D}$ associe le point d'intersection M' de (OM) et $\mathcal{D}'$ est une homographie p appelée **perspective** de centre O de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}'$. Le point d'intersection I de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est fixe par p et on a l'égalité de birapports $[\![A, B, C, D]\!] = [\![A', B', C', D']\!]$, voir figure ci-dessous.

2.1.3 Polaire

On considère deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en I et un point O extérieur. On trace deux sécantes (OA) et (OB) ($A, B \in \mathcal{D}$) qui recoupent $\mathcal{D}'$ en A', B'. Soit J le point d'intersection de (AB') et (BA'). Alors, la droite (IJ) est la **polaire** de O par rapport à $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$. Elle a la propriété suivante : pour tout

$M \in \mathcal{D}$, si M' est l'intersection de (OM) avec $\mathcal{D}'$ et P celle de (OM) et de la polaire, on a une division harmonique : $[\![M, M', O, P]\!] = -1$.

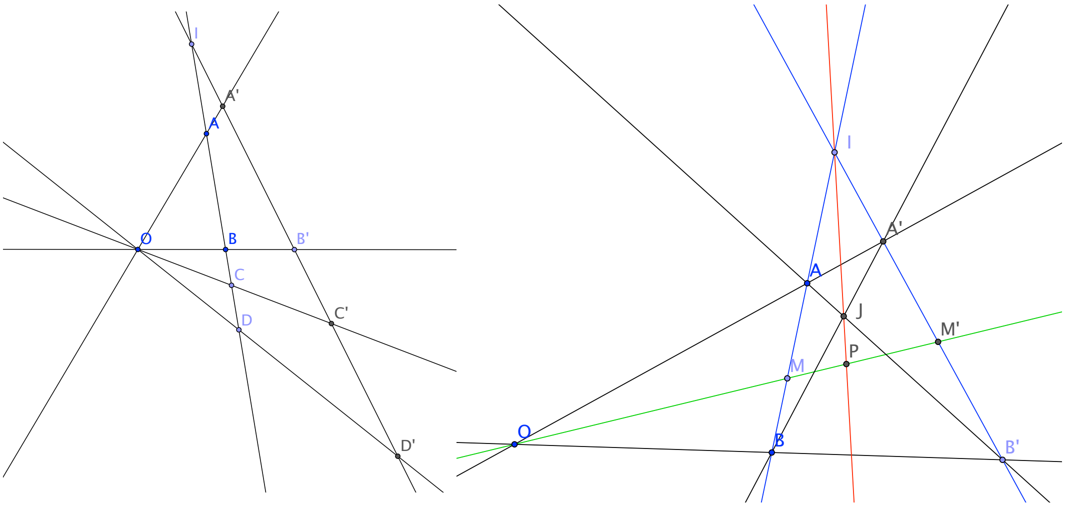

FIGURE 2 – Perspective et polaire

2.2 La situation

On considère quatre points A, B, C, D en position générale (moralement notre parallélogramme) et une droite Δ (moralement, la droite de l'infini). Les droites (AB) et (CD) (resp. (AD) et (BC)) se coupent en $u \in \Delta$ (resp. $v \in \Delta$) (moralement ces droites sont donc parallèles). On appelle e et t les intersections de Δ avec (BD) et (AC). On prend un point I quelconque sur (BD), on trace (IC), on appelle w son intersection avec Δ et J le conjugué harmonique de C par rapport à I, w (moralement, I est milieu de $[JC]$). Vu le rappel sur la polaire, ce point s'obtient comme intersection de (Ae) et (IC). On construit enfin K et L, intersections respectives de (AB) et (Jv) et de (AD) et (Ju). Alors, I, K, L sont alignés.

2.3 La preuve

On considère le point F, intersection de (KL) et (AJ) et on montre que (IF) et (KL) contiennent t. Comme F est aussi sur (KL), cela montrera que tous ces points sont alignés.

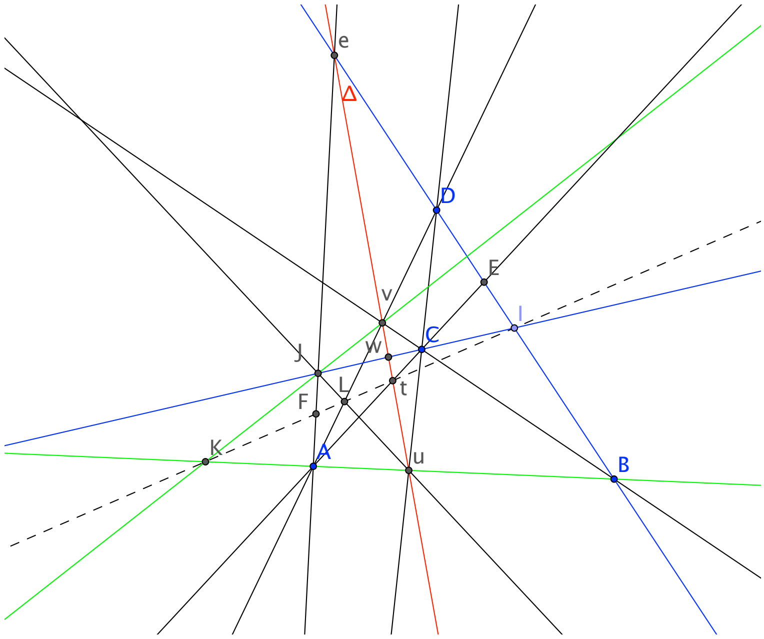

FIGURE 3 –

2.3.1 (IF) contient t

On considère la perspective de centre t de (IJ) sur (AJ). Elle fixe J, transforme C en A et w en e. Si elle transforme I en F, on a le résultat. Pour cela, il suffit d'avoir l'égalité de birapports $[\![J, C, w, I]\!] = [\![J, A, e, F]\!]$. Mais ces deux birapports valent -1, le premier par définition de J, le second par construction de la polaire de e par rapport aux droites (KJ), (KA).

2.3.2 (KL) contient t

On note que (AC) est la polaire de e par rapport aux droites (AB), (AD). On a donc $[\![u, v, t, e]\!] = -1$. Mais (KL) est la polaire de e par rapport à (KJ), (KA). Si t' est l'intersection de Δ avec (KL), on a donc aussi $[\![u, v, t', e]\!] = -1$, ce qui montre que $t = t'$, donc que t est sur (KL).