1 Passer des équations paramétriques à l'équation cartésienne d'un plan

1.1 Théorème. *On suppose le plan P donné par les équations paramétriques :*

$$x = a + \alpha u + \alpha' u'$$

$$y = b + \beta u + \beta' u'$$

$$z = c + \gamma u + \gamma' u'$$

où les deux vecteurs $V = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $V' = (\alpha, \beta, \gamma)$ sont non colinéaires et où u, u' sont des réels quelconques. Alors, le plan est l'ensemble des points (x, y, z) qui vérifient :

$$(*) \qquad (\beta\gamma' - \beta'\gamma)(x - a) + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)(y - b) + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(z - c) = 0.$$

Démonstration. Pour voir que les points de P vérifient $(*)$ on considère le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha \\ \beta & \beta' & \beta \\ \gamma & \gamma' & \gamma \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est évidemment nul et, si on le développe par rapport à sa dernière colonne, on a $(\beta\gamma' - \beta'\gamma)\alpha + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\beta + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\gamma = 0$, ce qui donne la moitié du résultat cherché[1]. Pour l'autre on remplace la dernière colonne du déterminant par α', β', γ'.

Dire que ces mineurs ($\beta\gamma' - \beta'\gamma$ et les autres) sont non tous nuls c'est dire que les vecteurs V et V' sont non colinéaires.

Réciproquement, si on a $X = (x, y, z)$ vérifiant $(*)$, il s'agit de voir qu'il s'écrit $X = uV + u'V'$. Mais, il est clair que $V = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $V' = (\alpha', \beta', \gamma')$ vérifient $(*)$ (toujours le déterminant nul), donc aussi toutes les combinaisons $uV + u'V'$. Comme ces vecteurs sont non colinéaires, et comme $(*)$ est non nulle, les solutions de l'équation $(*)$ forment un espace vectoriel de dimension 2 et on a ainsi toutes les solutions.

Si on ne veut pas parler d'espace vectoriel on peut raisonner comme suit. Soit (x, y, z) vérifiant $(*)$ (notée $A(x-a)+B(x-b)+C(x-c) = 0$). Supposons par exemple $C = \alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$. Alors on peut trouver u, u' tels que l'on ait $x = \alpha u + \alpha' u'$ et $y = \beta u + \beta' u'$. Posons $t = \gamma u + \gamma' u'$. Par le sens direct on a $A(x - a) + B(y - b) + C(t - c) = 0$. On en déduit, par différence $z = t$, d'où le résultat.

---

[1] On peut d'ailleurs faire le calcul directement sans parler de déterminant.

2 Équations définissant le même plan

2.1 Théorème. *Soient* P, P' *deux plans définis par des équations* $ax + by + cz + d = 0$ *et* $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ *avec* (a, b, c) *et* (a', b', c') *non nuls. On a* $P = P'$ *si et seulement il existe* $\lambda \in \mathbf{R}$ *tel que l'on ait* $a' = \lambda a$*,* $b' = \lambda b$*,* $c' = \lambda c$*,* $d' = \lambda d$*.*

Démonstration. Il est clair que la condition est suffisante. Réciproquement, supposons par exemple $a \neq 0$ et posons $\lambda = a'/a$, donc $a' = \lambda a$. Alors, si (x, y, z) est dans P, il vérifie aussi l'équation :

$$(b' - \lambda b)y + (c' - \lambda c)z + (d' - \lambda d) = 0. \tag{$\sharp$}$$

En écrivant que les points $(-d/a, 0, 0)$, $(\frac{-b-d}{a}, 1, 0)$ et $(\frac{-c-d}{a}, 0, 1)$ qui sont dans P vérifient aussi $(\sharp)$ on voit successivement qu'on a $d' = \lambda d$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$.