Le problème des tiers

Daniel PERRIN

1 Introduction

Le point de départ de ce texte est l'exercice suivant (extrait d'un manuel) qui m'a été proposé par Élise Barré puis par Sylvie Gond que je remercie vivement.

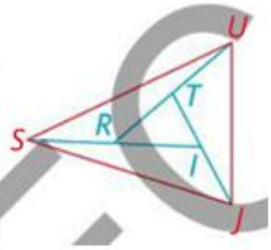
2) Un triangle dans un triangle - Exercice 2^{nde} (MR 104p283)

104. Le défi de Daffy

Voici le défi : « À partir d'un triangle JUS, construire le triangle TRI tel que T est le milieu du segment $[RU]$, R le milieu du segment $[SI]$ et I le milieu du segment $[TJ]$. » Mais comment construire ces trois points sachant qu'ils sont définis les uns en fonction des autres ?

Partie I : Astuce et analyse

On prend le problème à l'envers : on considère la figure ci-contre, où le triangle JUS est obtenu à partir des symétriques respectifs des sommets du triangle TRI.
On se place dans le repère (R, I, T).



1. Donner les coordonnées des points J, U et S.
2. En déduire une équation de la droite (RU).
3. La droite (RU) coupe la droite (SJ) en un point V. Déterminer les coordonnées de ce point V.
4. On note W le milieu du segment $[VJ]$.

Montrer que le point V est le milieu du segment $[SW]$. Quelle interprétation peut-on faire de la position des points V et W sur le segment $[SJ]$?

Partie II : À vous de jouer !

Essayer maintenant de répondre au défi, en justifiant la construction.

2 Le problème

Il y a de multiples variantes du problème. Je reprends ici celui de l'énoncé, mais je change les notations, pour reprendre celles dont j'ai l'habitude, et surtout, parce que je trouve STUPIDE la mode actuelle des manuels de donner aux triangles des noms soi-disant "rigolos" comme JUS et TRI. Dans un exemple comme celui-ci, cela fait perdre un outil essentiel que j'appelle le caractère *sémiotique* de la question (c'est-à-dire lié aux signes) et qui fait que les permutations circulaires ont un effet clair sur les points, à savoir celui de

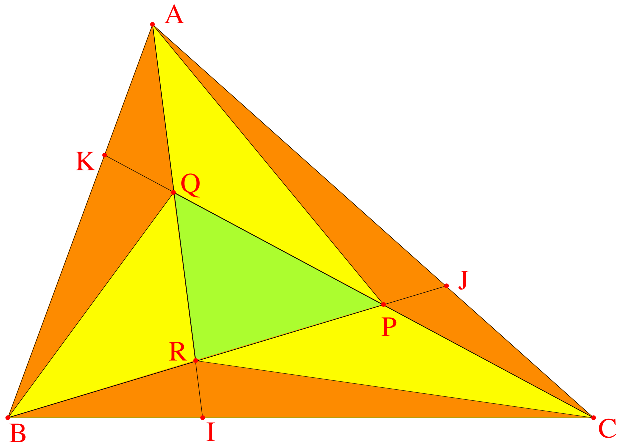


FIGURE 1 – Le problème des tiers

suivre l'ordre alphabétique. C'est pourquoi j'appelle le grand triangle ABC, le petit PQR et les points sur les côtés IJK, en respectant une logique. Par exemple le premier point sur les côtés est I, situé sur $[BC]$, qui est le premier côté car situé face au premier sommet A, etc. Si l'on prend cette précaution, cela donne des résultats bien plus satisfaisants et faciles à mémoriser.

Ces choses étant dites, le problème est le suivant :

2.1 Question. *On se donne un triangle ABC, construire un triangle PQR tel que*[1] *P soit le milieu de $[CQ]$, Q de $[AR]$ et R de $[BP]$.*

On note que la question s'exprime en termes de vecteurs : $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PQ}$, etc.

Parmi les autres questions possibles sur ce thème, j'utilise systématiquement la suivante dans toutes mes conférences sur la géométrie :

2.2 Question. *Dans la figure ci-dessus, on suppose I, J, K aux tiers des côtés. Calculer le rapport des aires de ABC et PQR.*

3 Analyse

Le résultat proposé dans le manuel est le suivant :

3.1 Théorème. *On reprend les notations de 2.1 et on suppose le triangle PQR construit avec la propriété des milieux. On appelle respectivement I, J, K les points d'intersection de (QR) et (BC), (RP) et (CA), (PQ) et (AB). Alors, on a $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AK}$.*

1. On remarque que l'on passe d'un point au suivant par permutation circulaire.

3.2 Commentaires. 1) Le bon énoncé est en termes de vecteurs [2] mais si l'on ne veut pas les utiliser, on peut préciser que I est au tiers de $[BC]$, du côté de B.

2) En toute rigueur, il faut montrer que les droites (QR) et (BC), par exemple, se coupent. Par définition du milieu, P et C sont du même côté de (QR), tandis que P et B sont de part et d'autre. Il s'ensuit que B et C sont de part et d'autre et cela montre que (QR) coupe le segment $[BC]$. Il n'y a donc pas à aller chercher d'éventuels points à l'extérieur du triangle.

3) On notera que le théorème assure **l'unicité** de la solution du problème. En effet, si l'on a une solution, elle est construite en prenant les tiers I, J, K et en les joignant à A, B, C.

Démonstration. L'énoncé du manuel propose une preuve analytique de ce théorème en choisissant PQR comme repère (non orthonormé). **Attention**, il est essentiel de comprendre pourquoi c'est correct, voir §5 ci-dessous. Par ailleurs, il y a d'autres preuves, bien plus géométriques. Voici ma préférée (on peut aussi utiliser les barycentres).

Preuve par les aires

La propriété des milieux montre que les sept triangles coloriés sur la figure ont même aire. (C'est ce que j'appelle le lemme de la médiane.) On applique alors le lemme du chevron [3] dans le triangle BQC, avec les ailes BQR et CQR. Comme on a $\mathcal{A}(CQR) = 2\,\mathcal{A}(BQR)$ on en déduit $IC = 2\,IB$. De même pour les autres.

4 Synthèse

Contrairement à ce que semble sous-entendre l'énoncé du manuel, il faut absolument montrer la réciproque, c'est-à-dire le résultat suivant :

4.1 Théorème. *Soit ABC un triangle, I, J, K les points situés respectivement sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, au tiers du côté de B, C, A. Soient P, Q, R les points d'intersection de (BJ) et (CK), de (CK) et (AI) et de (AI) et (BJ) respectivement. Alors, P est le milieu de $[CQ]$, Q de $[AR]$ et R de $[BP]$.*

Démonstration. Il y a plusieurs démonstrations possibles.

Preuve numéro 1 : par l'analytique

On prend ABC comme repère avec $B = (0, 0)$, $C = (1, 0)$ et $A = (0, 1)$ par exemple (pour ne pas être dépaysé par la figure). Là encore, il faut expliquer

2. Autrefois on aurait utilisé les mesures algébriques.

3. Voir [ME] Chapitre 7.

pourquoi il est légitime de prendre un repère non orthonormé, voir §5. On calcule les coordonnées des points I, J, K, les équations des droites qui les joignent aux sommets et les coordonnées de P, Q, R. On obtient par exemple $Q = (\frac{1}{7}, \frac{4}{7})$, $R = (\frac{2}{7}, \frac{1}{7})$ et on vérifie que Q est milieu de $[AR]$. Il n'y a pas de difficulté, mais c'est bourrin et cette preuve présente l'inconvénient de rompre la symétrie du problème.

Preuve numéro 2 : par les barycentres

On écrit les points I, J, K comme barycentres de A, B, C. Par exemple $I = \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}C\cdot$ On calcule ensuite P, Q, R et on trouve $P = \frac{2}{7}A + \frac{1}{7}B + \frac{4}{7}C$ et de même pour les autres par permutation circulaire. On vérifie qu'on a la propriété voulue.

Preuve numéro 3 : par les aires

Il suffit de montrer que les aires jaunes sont égales et égales à l'aire verte. En effet, par le lemme de la médiane, cela implique alors que P est le milieu de $[CQ]$, par exemple. Appelons t l'aire de PQR et a, b, c les aires jaunes (a est celle du triangle contenant A, etc.) Le lemme du chevron, appliqué à ABP donne $2a = t + b$ et, de même, $2b = t + c$ et $2c = t + a$. Je dis que cela implique $a = b = c = t$. C'est un joli raisonnement par l'absurde. Sinon, supposons par exemple, $a > t$. Alors, avec $2a = t + b$, on voit qu'on a $b > a > t$ et avec $2b = t + c$, que l'on a $c > b > a > t$. Mais cela contredit $2c = t + a$!

Preuve numéro 4 : par Erlangen

C'est la preuve la plus subtile, mais aussi la moins fatigante. La propriété en question est une propriété affine. Or, tous les triangles sont équivalents sous le groupe affine. Il suffit donc de la prouver pour un triangle. Mais, à cause de l'unicité, elle est vraie pour le triangle ABC construit à l'envers à partir de PQR, donc elle l'est pour tous !! Voir le paragraphe suivant pour des explications.

5 Erlangen ?

Il s'agit du fameux Programme d'Erlangen de Felix Klein (1873) qui explique qu'une géométrie c'est un groupe opérant sur un ensemble et que les propriétés de cette géométrie sont celles qui sont invariantes par le groupe. Ici, l'ensemble est le plan et le groupe celui des transformations affines. Rappelons ce que signifie que f est une application affine. Si l'on pose $f(P) = P'$, dire que f est affine c'est dire que l'application $\vec{f}$ qui à $\overrightarrow{PQ}$ associe $\overrightarrow{P'Q'}$ est **linéaire**. Pour une telle application, on a la formule $\vec{f}(\lambda\vec{v}) = \lambda\vec{f}(\vec{v})$. C'est ce qui fait que les propriétés intervenant dans l'exercice (milieux et tiers) sont bien affines. **Attention**, pour se convaincre de cela, il faut absolument exprimer ces propriétés en termes de **vecteurs** (par exemple M est milieu de $[AB]$ signifie $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, M est au tiers de $[AB]$ du côté de A s'écrit $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AM}$) et surtout pas de longueurs. En effet, les transformations affines ne conservent pas les longueurs, en revanche, elles conservent les relations vectorielles du type $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AM}$ puisqu'en appliquant f on a bien $\overrightarrow{M'B'} = 2\overrightarrow{A'M'}$ donc la conservation des rapports pour des vecteurs colinéaires.

Lorsqu'on a affaire à des propriétés affines, à la fois dans leurs hypothèses et leurs conclusions, on peut utiliser des repères affines (ou cartésiens), non orthonormés. C'est ce qui justifie ici l'emploi des repères cartésiens [4]. Si on donne l'énoncé avec des longueurs, cela devient frauduleux.

Ce point de vue permet aussi d'expliquer la preuve numéro 4 de 4.1. Le résultat qui permet de conclure est le suivant :

5.1 Théorème. *Le groupe affine est transitif sur les triangles.*

Démonstration. Si on a deux triangles ABC et $A'B'C'$ on envoie A sur A' par translation. On est ramené au cas $A = A'$ et on envoie alors $\overrightarrow{AB}$ sur $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AC'}$ par une application linéaire, ce qui est possible puisqu'il s'agit de bases. Pour une preuve géométrique, on peut utiliser une suite de transformations affines (translation, rotation, homothétie, transvection, affinité).

C'est ce résultat qui permet de dire que si le théorème 4.1 est vrai pour **un** triangle (celui construit à l'envers) il l'est pour tous.

Dans ce que je fais sur ma page web avec le problème des aires, j'utilise la transitivité, pour me ramener au cas d'un triangle équilatéral. Voir :

`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPintro.pdf`

6 Références

[ME] PERRIN Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.

4. Et c'est un point sans doute trop subtil pour des lycéens, à mon avis.