Sur le produit vectoriel

Daniel PERRIN

Introduction

On étudie les deux approches usuelles du produit vectoriel : la version élémentaire décrite en terme d'orthogonalité et de sinus et celle qui prend comme point de départ une application bilinéaire alternée.

Dans tout ce qui suit, on travaille dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3, orienté, noté E. On note $(x|y)$ le produit scalaire des vecteurs x, y et $\|x\|$ la norme du vecteur x. On rappelle que l'angle (non orienté [1]) $\theta = \widehat{x, y}$ des vecteurs non nuls x, y est le nombre de $[0, \pi]$ défini par $\cos\theta = \dfrac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}$.

1 Rappels et préliminaires

1.1 L'identité de Lagrange

Il s'agit d'une identité polynomiale qui est, en fait, le ressort principal de ce qui suit.

1.1 Lemme. *Soient $a, b, c\,; x, y, z$ des nombres* [2] *ou des indéterminées. On a l'identité suivante* [3] *:*

$$(ax+by+cz)^2+[(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2] = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

Démonstration. Il suffit de faire le calcul, qui est sans difficulté.

1.2 *Remarque.* Bien entendu, quand on aura défini le produit vectoriel, cette identité s'écrira :

$$(u|v)^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2,$$

1. Il n'y a pas de définition satisfaisante d'angles orientés dans l'espace. Avec la définition ci-dessus, le cosinus d'un angle peut être négatif, mais le sinus est obligatoirement positif.
2. D'un anneau commutatif, par exemple $\mathbf{R}$.
3. Voir l'épreuve sur dossier de CAPES du 28 juin 2013.

et c'est essentiellement la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

1.2 Cosinus et sinus

On se donne une base orthonormée i, j, k de E et on considère les vecteurs $u = xi + yj + zk$ et $v = x'i + y'j + z'k$. On sait qu'alors on a $(u|v) = xx' + yy' + zz'$, $\|u\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et $\|v\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. On en déduit la valeur du cosinus :

$$\cos \widehat{u, v} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Pour le sinus on a le résultat suivant :

1.3 Lemme. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\sin^2 \widehat{u, v} = \frac{(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2}{(x^2 + y^2 + z^2)\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)}.$$

Démonstration. Cela résulte de la formule qui donne le cosinus, de la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ et de l'identité de Lagrange.

2 L'approche élémentaire du produit vectoriel

2.1 Définition

2.1 Proposition-Définition. *Il existe une unique application $\Phi : E \times E \to E$ qui associe à deux vecteurs u, v un vecteur noté $u \wedge v$, vérifiant les propriétés suivantes :*

1) Si u, v sont colinéaires on a $u \wedge v = 0$.

2) Si u, v ne sont pas colinéaires, le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et v, la base $u, v, u \wedge v$ est directe et on a :

$$\|u \wedge v\| = \|u\|\,\|v\|\,\sin \widehat{u, v}.$$

Démonstration. L'existence et l'unicité se montrent ensemble. Le cas colinéaire est clair. Sinon, l'orthogonal du plan vectoriel (u, v) est une droite vectorielle donc engendrée par un vecteur w non nul. Il y a sur cette droite deux vecteurs opposés dont la norme est donnée par la formule ci-dessus et seul l'un des deux donne une base directe avec u, v.

2.2 Expression en coordonnées

On se donne une base orthonormée directe i, j, k et deux vecteurs u, v de coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') sur cette base. On a alors le résultat (fondamental) suivant :

2.2 Théorème. *Les coordonnées de $u \wedge v$ dans la base i, j, k sont :*

$$(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx').$$

Démonstration. Le cas où les vecteurs sont colinéaires est évident. Montrons que le vecteur w dont les coordonnées sont données ci-dessus vérifie les trois conditions définissant $u \wedge v$.

1) Il est orthogonal à u, v. Il s'agit de montrer qu'on a, par exemple :

$$x(yz' - zy') + y(zx' - xz') + z(xy' - yx') = 0.$$

On peut faire le calcul (facile) directement, ou noter que c'est le développement du déterminant (évidemment nul) suivant : $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$ par rapport à sa première ligne.

2) Le fait que la base soit directe signifie exactement que le déterminant de u, v, w est positif, c'est-à-dire le déterminant $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ yz' - zy' & zx' - xz' & xy' - yx' \end{vmatrix}$. Mais, en développant par rapport à la dernière ligne, on trouve simplement :

$$(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2$$

qui est bien positif.

3) Il reste à montrer que la norme du vecteur w est bien égale à $\|u\| \, \|v\| \sin \widehat{u, v}$, mais c'est exactement la formule donnant le sinus vue en 1.3.

2.3 *Remarque.* La définition ou l'expression en coordonnées donnent les formules $j \wedge k = i$, $k \wedge i = j$, $i \wedge j = k$.

2.3 Bilinéarité

2.4 Corollaire. *L'application $\Phi : (u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire, ce qui signifie qu'on a, pour $u, v, w \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$:*

$$(\lambda u + \mu v) \wedge w = \lambda(u \wedge w) + \mu(v \wedge w)$$

et la relation analogue en échangeant les facteurs.

Elle est aussi alternée (ce qui signifie qu'on a $u \wedge u = 0$) et antisymétrique ($v \wedge u = -u \wedge v$).

Démonstration. Tout est clair avec l'expression en coordonnées.

2.5 *Remarque.* Il y a une autre voie pour montrer les résultats précédents qui consiste à prouver d'abord la bilinéarité puis l'expression en coordonnées. Le point délicat est de montrer que, pour u fixé, l'application $\Phi_u : v \mapsto u \wedge v$ est linéaire. On montre pour cela qu'elle est composée de trois applications linéaires :

$$\Phi_u = h_{\|u\|} \circ r(u, \pi/2) \circ p_u$$

où p_u est la projection orthogonale de E sur $u^\perp$, r la rotation d'axe u et d'angle $\pi/2$ et h l'homothétie de rapport $\|u\|$. Voir par exemple le livre de Michèle Audin *Géométrie* (Belin éditeur).

3 L'approche bilinéaire

3.1 Théorème-Définition. *1) Il existe une unique application bilinéaire alternée $\Phi : E \times E \to E$ qui associe à deux vecteurs u, v un vecteur noté $u \wedge v$ et qui vérifie $i \wedge j = k$, $k \wedge i = j$ et $j \wedge k = i$ pour toute base orthonormée directe i, j, k.*

2) Si les vecteurs u, v ont pour coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') sur une base orthonormée directe i, j, k, les coordonnées de $u \wedge v$ sur cette base sont

$$(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx').$$

3) Le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u, v, sa norme est égale à $\|u\| \, \|v\| \sin \widehat{u, v}$ et, si les vecteurs u, v sont indépendants, $u, v, u \wedge v$ est une base directe de E.

Démonstration. En vérité, toutes les propriétés (existence, unicité, norme, etc.) découlent du calcul en coordonnées. On choisit donc une base orthonormée directe i, j, k et on écrit les vecteurs u, v sur cette base : $u = xi + yj + zk$ et $v = x'i + y'j + z'k$.

On note d'abord que les conditions impliquent que Φ est antisymétrique. En effet, on calcule $(u + v) \wedge (u + v) = 0 = u \wedge u + u \wedge v + v \wedge u + v \wedge v$ et on obtient $u \wedge v = -v \wedge u$. En particulier on a $j \wedge i = -k$ et les formules analogues.

On peut alors calculer $u \wedge v$ sur la base et on voit aussitôt que les coordonnées sont celles annoncées ci-dessus. Cela montre l'unicité de Φ. De plus, on a alors le point 3) par les mêmes arguments que ceux utilisés en 2.2.

Pour l'existence, on vérifie que l'application définie par les formules en coordonnées est bien bilinéaire alternée. Il reste à voir que, pour toute base orthonormée directe u, v, w on a $w = u \wedge v$, etc. Mais, on a vu que $u \wedge v$

est orthogonal à u, v, qu'il est de norme 1 (car u, v sont de norme 1 et orthogonaux, de sorte que le sinus de leur angle est 1), et que $u, v, u \wedge v$ est directe et donc, $u \wedge v$ n'est autre que w. Le raisonnement est identique pour les autres.

3.2 *Remarque.* On voit que les deux chemins mènent au même objet puisque, dans chaque cas, on retrouve les propriétés qui ont servi de point de départ pour l'autre cas. Le choix n'est plus qu'une question de goût.