À PROPOS D'ANGLES ORIENTÉS

Daniel PERRIN

Je retranscris ici – fidèlement je l'espère – un débat qui a eu lieu dans notre préparation au CAPES il y a déjà quelque temps et dont les protagonistes principaux étaient ma collègue Laure Blasco et moi-même. La question pourra intéresser d'autres personnes, sans doute.

1 Le problème mathématique

La question est la définition des angles orientés de vecteurs dans le plan. En fait, deux conceptions s'affrontent. Pour les nommer commodément et personnaliser le débat, je vais parler ici des angles au sens de Laure (mais, derrière elle, il y a beaucoup d'autres mathématiciens, sans doute la majorité !) et des angles au sens de Daniel (et j'espère tout de même ne pas être tout seul !).

Dans ce qui suit, E désigne un plan vectoriel euclidien. La question de son orientation est cruciale et sera abordée dans chaque cas.

1.1 Les angles au sens de Laure

J'espère ne pas trahir sa pensée en disant que pour Laure, les angles sont définis comme suit (voir aussi [DHP] 3.5).

On ne suppose pas le plan orienté.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de E. Pour deux éléments (x, y) et (x', y') de $\mathcal{A}$, on a une propriété de "parallélogramme", qui vient de la commutativité de $O^+(E)$ et qui affirme que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) l'unique rotation qui envoie x sur y est la même que celle qui envoie x' sur y',

ii) l'unique rotation qui envoie x sur x' est la même que celle qui envoie y sur y'.

La relation définie par *i)* ou *ii)* est une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$. On note $\widehat{\mathcal{A}}$ l'ensemble quotient $\mathcal{A}/\mathcal{R}$, c'est l'ensemble des angles orientés de vecteurs au sens de Laure et la classe de (x,y), notée $\widetilde{x,y}$, est l'angle de vecteurs au sens de Laure.

L'application Φ qui associe à $(x,y) \in \mathcal{A}$ associe l'unique rotation ρ qui envoie x sur y induit une bijection $\overline{\Phi}$ de $\widehat{\mathcal{A}}$ sur $O^+(E)$ et on définit une addition sur $\widehat{\mathcal{A}}$ en transportant la structure de groupe de $O^+(E)$ de sorte qu'on ait la formule :

$$\overline{\Phi}(\widetilde{x,y} + \widetilde{x',y'}) = \overline{\Phi}(\widetilde{x,y}) \circ \overline{\Phi}(\widetilde{x',y'}).$$

Pour résumer, le groupe des angles est un groupe abélien, canoniquement isomorphe au groupe des rotations, tellement canoniquement que Dieudonné dans [ALGE] définit le groupe des angles comme le groupe des rotations noté additivement [1].

Dans cette définition, ce qui est important, et qui fait qu'il s'agit bien d'angles orientés, c'est que les angles $\widetilde{x,y}$ et $\widetilde{y,x}$ sont opposés, mais cela n'a **aucun sens** de se demander lequel est positif et lequel est négatif.

1.2 Les angles au sens de Daniel

On se reportera à [DHP] pour toutes précisions. J'insiste ici sur les différences (d'ailleurs minimes) avec l'autre point de vue. La principale est qu'on part du plan euclidien **orienté**. Cela signifie qu'on a choisi une base orthonormée particulière, ou plutôt une classe de bases orthonormées, dites directes, et équivalentes sous $O^+(E)$. On peut alors définir, sans ambiguité, la matrice d'une rotation : elle ne dépend pas du choix d'une base orthonormée directe. On obtient ainsi un isomorphisme Φ de $O^+(E)$ sur $O^+(2,\mathbf{R})$. Par ailleurs, on a des isomorphismes canoniques [2] bien connus : $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \simeq \mathbf{U} \simeq O^+(2,\mathbf{R})$ qui associent à $\overline{\theta}$, $e^{i\theta}$, puis à $a+ib$ la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. On a donc finalement un isomorphisme de $O^+(E)$ sur $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, donc de $\widehat{\mathcal{A}}$ sur $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. L'angle au sens de Daniel du couple de vecteurs (x,y) c'est l'image par cet isomorphisme de l'angle au sens de Laure. Bon, c'est tout de même un peu la même chose, non ?

La différence fondamentale entre les deux conceptions c'est que, comme l'isomorphisme Φ dépend de l'orientation, l'angle $\overline{\theta}$ au sens de Daniel de x,y dépend de l'orientation : si l'on en change, il est changé en $-\overline{\theta}$. Laure appelle cet angle (au sens de Daniel) **mesure** de l'angle (au sens de Laure).

1. Voilà ce qu'il dit. *On a vu que le groupe des rotations $O^+(E)$ est commutatif. Il est commode dans les calculs de le noter additivement. Pour éviter les confusions on introduit un groupe noté A ou $A(E)$, isomorphe à $O^+(E)$ ...*

2. Au sens où ils n'ont rien à voir avec le choix de l'orientation.

2 Discussion

2.1 Précautions

Bête et obstiné, je vais persister dans la position défendue dans [DHP], une raison fondamentale et inavouable étant que je n'ai pas du tout envie de le récrire. Cependant je voudrais dire trois choses :

1) La position de Laure est tout à fait honorable et c'est certainement celle de la plupart des collègues. Dans cette histoire, c'est plutôt la mienne qu'il faut que je justifie.

2) Je ne suis pas totalement certain de ne pas être amené, dans d'autres circonstances, à défendre la position contraire ...

3) Je ne suis pas hostile à ce que coexistent dans la préparation au CAPES les deux conceptions. En vérité, j'y suis même plutôt favorable pour plusieurs raisons. D'abord, ce n'est pas mal que nos étudiants voient qu'il y a des débats parmi les mathématiciens, et des choix différents possibles sur certaines questions. C'est aussi le cas, par exemple, à propos de la limite d'une fonction en un point (la controverse [3] pour savoir si on impose $x \neq a$). Ensuite, ma position, même si je la défends ardemment, n'est pas la plus courante et il est bon que les étudiants soient prévenus qu'il y en a d'autres, peut-être plus usuelles, qui peuvent être celles de certains membres du jury et, comme on le verra ci-dessous, apparaître dans les problèmes d'écrit.

2.2 Quelques arguments en faveur de ma position

• Mon argument essentiel est didactique. Ce qui me gêne, dans les angles au sens de Laure, c'est qu'ils vivent dans un groupe abstrait, le fameux $\widehat{\mathcal{A}}$, qu'on ne peut comprendre que de deux façons, soit comme un quotient, et c'est sans doute difficile pour nos étudiants, soit comme une variante additive de $O^+(E)$, et c'est sans doute un peu artificiel. Je n'ai vraiment pas envie de développer toute la théorie avec cet objet supplémentaire où, dès l'abord, les étudiants seront en difficulté pour comprendre de quoi on parle et n'y parviendront qu'au prix d'un effort que j'estime inutile.

Vous allez me dire que, moi aussi, j'utilise un quotient en prenant $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Certes, mais le modulo 2π est sans doute le quotient le plus familier et le

3. Les hasards du calendrier font que le jour même où je revois ce texte, j'ai connaissance de la diatribe d'un collègue sur ce sujet, d'ailleurs excessive à mon sens voir :

http ://skhole.fr/l-imposture-de-l-enseignement-scientifique-dans-les-lycees-francais-par-bertrand-rungaldier

et, pour voir ma position personnelle, le papier *limite*, sur ma page web, rubrique CAPES, analyse.

plus concret pour les étudiants, car ils le pratiquent depuis le lycée.

• J'ai une autre objection, de nature sémantico-mathématique celle-là. Qu'est-ce qu'un angle ? Mon opinion, comme je l'explique dans [DHP] : c'est que c'est un *taraboutzim*, un invariant qui permet de décrire les orbites de $O^+(E)$ sur les couples de vecteurs unitaires. Ce que je reproche à l'angle au sens de Laure, à cet égard, c'est qu'il est tautologique : l'angle au sens de Laure c'est exactement l'orbite de (x, y) sous $O^+(E)$, en fait. Autrement dit, en définissant cet angle, on n'a pas avancé d'un iota [4] par rapport au problème de double transitivité. Celui que je propose, en revanche, contient dans sa définition les deux isomorphismes entre les matrices et $\mathbf{U}$ et entre $\mathbf{U}$ et $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Il est donc porteur de plus d'information, à mon avis : il fait plus avancer le schmilblic.

• Un autre argument, sémantico-épidermique : je déteste, mais alors je déteste vraiment, l'appellation de mesure des angles. Deux raisons. La plus importante, sémantique, c'est que ce n'est pas une mesure au sens usuel, par exemple, celui qui est (brillamment) développé dans mon (magnifique [5]) livre [DP1]. En effet, d'abord, il n'y a pas d'ordre sur les angles orientés et donc on ne peut pas comparer deux mesures, ensuite, il y a des angles non nuls dont un multiple est nul et là encore, le mot mesure est totalement inadapté pour décrire cette situation [6]. L'autre raison, épidermique, c'est que je trouve terriblement pédante cette obligation imposée par les cuistres qui ont sévi au temps des maths modernes de dire sans arrêt : *la rotation dont la mesure de l'angle est* $\pi/2$: la rotation d'angle $\pi/2$ me convient tout à fait. De toutes façons, ce genre de choses, pour les élèves, devient, au mieux, une formule rituelle incompréhensible qu'ils répètent sans comprendre, et vous savez bien que je déteste le catéchisme ! Bien entendu, je suis plus sensible à ce travers des maths modernes que ceux qui sont tombés dedans quand ils étaient petits, ce qui est sans doute le cas de Laure.

En vérité, c'est ici que, si on cherche bien, on peut (essayer de) me mettre

4. Je cite Dieudonné, souvent le plus explicite dans ce genre de choses, à propos de la définition du groupe des angles. *Il faut bien comprendre qu'il n'y a là* aucun théorème *mais simplement une* convention d'écriture.

5. Publicité gratuite.

6. Je cite encore Dieudonné. *Quant à la soi-disant "mesure" des angles, elle s'inscrit dignement dans la confusion générale qui règne à ce propos ; pour le mathématicien professionnel, alors que la nature nous offre gratuitement, avec le groupe des rotations planes, un admirable exemple de groupe infini possédant des éléments d'ordre fini quelconque, c'est une insondable sottise que de chercher à tout prix à masquer ce fait essentiel en prétendant "mesurer" ce qui n'est pas mesurable, introduire un "ordre" là où il n'y en a pas et feindre de croire qu'une droite se souvient d'avoir tourné de* 26π *lorsqu'elle est revenue à la même position !* Cela étant, les conclusions que je tire sont diamétralement opposées à celles de Dieudonné.

en contradiction avec moi-même ! En effet dans mon livre, je plaide en faveur des grandeurs, et, pour les angles non orientés, j'aurais plutôt tendance maintenant à distinguer la grandeur angle (qui vit dans un quotient) et sa mesure en radians (qui habite $[0, \pi]$), chose que je ne fais pas dans [DHP]. Cela étant, encore un coup, ce n'est pas la même chose avec l'angle orienté, qu'on ne peut considérer comme une grandeur (notamment à cause des angles d'ordre fini), et, en plus, cela concerne plutôt l'unité (radian *versus* degré par exemple).

• Sur le fond, le défaut de ma position c'est que l'angle en mon sens dépend de l'orientation. D'accord et, comme le dit Laure, quelle que soit l'orientation, $\widetilde{u,v}$ est l'angle qui va de u vers v et pas celui qui va de v vers u. Mais moi, à l'inverse, je suis vraiment **très** gêné de dire que la rotation qui envoie $\vec{i}$ sur $\vec{j}$ (la base usuelle) est toujours de même angle quelle que soit l'orientation. Mon intuition, la façon dont je pense, je dirais même dont je **vois** les choses, c'est que cet angle est $+\pi/2$ si on a orienté dans le bon sens (c'est-à-dire si $(\vec{i}, \vec{j})$ est directe) et $-\pi/2$ si on a orienté dans l'autre sens. Si je cherche bien où est ma réticence, je retrouve quelque chose que je suis en train de faire actuellement dans un autre cadre : certes, sur les angles, ou le cercle, il n'y a pas de relation d'ordre, mais, grâce à la mesure, il y en a tout de même des partielles. En fait, voilà ce qui me gêne dans $\widehat{\mathcal{A}}$: bien qu'il s'agisse du groupe des angles orientés, on n'est pas fichu de dire si un angle est positif ou non.

• Je suis convaincu (et c'est mon expérience) que cette difficulté vis à vis de l'orientation n'est pas gênante au niveau du CAPES si on voit les choses comme je le propose. Ce qu'il faut bien avoir à l'esprit c'est que, si on change d'orientation, les angles sont changés en leurs opposés et c'est tout. Prenons l'exemple du problème de CAPES de 1991. La question qui a posé problème à Laure était la suivante :

On suppose qu'on a $\vec{v}.\vec{w} = -\cos(\pi/m)$, *où* $m \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$.

1) Montrer qu'on peut orienter $\mathcal{E}$ *de manière que l'angle orienté* $(\vec{v}, \vec{w})$ *ait pour mesure* $\pi - \pi/m$.

Voilà l'extrait du corrigé (écrit par moi autrefois et que je recopie texto) de la question :

1) Comme les vecteurs $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *sont unitaires et qu'on a* $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} = -\cos(\pi/m) = \cos(\pi - \pi/m)$, *l'angle de vecteurs* $(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}})$ *vaut* $\pi - \pi/m$ *ou* $-(\pi - \pi/m)$ *selon le choix de l'orientation. Quitte à changer d'orientation on peut donc supposer qu'il vaut* $\pi - \pi/m$.

On remarquera que j'ai écrit ce corrigé à ma sauce, sans parler de mesure d'angle comme le faisait le texte. Pour aller dans le sens du texte on devrait dire, en utilisant justement la tournure pédante que je dénonçais ci-dessus :

la mesure de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}})$ *vaut* $\pi - \pi/m$ *ou* $-(\pi - \pi/m)$ *selon le choix de l'orientation. etc.*

Je reconnais que cet exemple, même si je suis prêt à défendre mordicus la façon dont je le traite, est une pierre dans mon jardin. En effet, il faut bien que les étudiants de CAPES, qui passent l'écrit en étant bien obligés de lire des énoncés tels qu'ils sont, comprennent ce qu'on leur demande dans cette question et, pour cela, qu'ils aient entendu parler de mesure des angles. C'est pourquoi j'encourage plutôt Laure à faire valoir sa position en disant *mesure des angles* si elle préfère, même si je déteste cette appellation.

• Pour être totalement honnête, il y a un argument, fort, en faveur de la position de Laure, comme mon épouse me l'a fait remarquer. Dans le cas des vecteurs **d'une droite**, il y a une situation analogue : le vecteur $\overrightarrow{ab}$ (au sens de Laure !) est bien défini et l'analogue du vecteur au sens de Daniel c'est la mesure algébrique $\overline{ab}$ qui dépend de l'orientation de la droite. C'est vrai que, dans ce cas là, je dis vecteur comme tout le monde et je ne confonds pas le vecteur avec la mesure algébrique. Cela étant, je pense que la situation est différente. En effet, là encore, s'il n'y avait de vecteurs que sur une droite, on n'en parlerait pas, alors qu'on parlerait encore de mesure algébrique. L'intérêt des vecteurs c'est qu'ils existent dans le plan, avec l'addition vectorielle. La meilleure preuve de ce fait c'est qu'en géométrie hyperbolique (voir la Partie IV de [DP2]) on peut définir des vecteurs sur chaque droite (à la manière de Laure), mais ils n'y en a pas dans le plan (car le groupe des isométries est simple). La conséquence : on peut les définir (je le fais dans mon livre à venir), mais personne ne le fait et personne ne s'en sert, ce qui rejoint ce que je disais plus haut. D'ailleurs, toujours en géométrie hyperbolique, on peut aussi définir des angles orientés **en chaque point**, mais ils ne sont pas compatibles et donc à peu près sans intérêt.

Références

[ALGE] Dieudonné J., *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, 1968.

[DP1] Perrin D., *Mathématiques d'École*, Cassini, 2005.

[DP2] Perrin D., *Géométrie projective et application aux géométries euclienne et non euclidiennes*, en préparation.

http ://www.math.u-psud.fr/ perrin/Livre_de_geometrie_projective.html

[DHP] David M.-C., Haglund F., Perrin D., *Polycopié de géométrie euclidienne du CAPES d'Orsay*, disponible sur ma page web : http ://www.math.u-psud.fr/ perrin/CAPES.html.