La croissance du sinus

L'objectif de ce texte est de montrer que la fonction sinus est croissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. *La grande difficulté est de savoir exactement quelles sont les prémisses de ce qu'on fait. Je n'entrerai pas dans ce débat. Si l'on veut être sérieux, il faut avoir un système d'axiomes cohérent. Voir [Hilbert] ou [CF], ou [DP] lorsqu'il verra le jour.*

Références

[CF] COUSIN-FAUCONNET Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.

[Hilbert] HILBERT David, *Les fondements de la géométrie*, Dunod (1971).

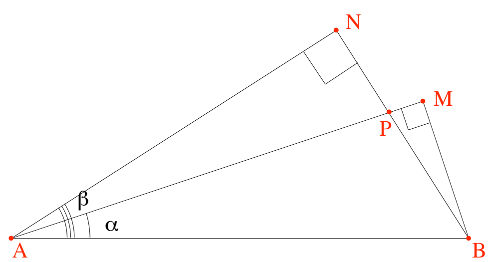
[DP] PERRIN Daniel, *Une axiomatique pour la géométrie du collège*, en projet.

1 La voie des triangles

1.1 Théorème. *Soient* α *et* β *deux angles aigus avec* $\alpha < \beta$. *On a* $\sin\alpha < \sin\beta$.

Démonstration. On considère un segment $[AB]$ et on construit sur ce segment deux triangles rectangles dont il est l'hypoténuse, ABM avec $\widehat{BAM} = \alpha$ et ABN avec $\widehat{BAN} = \beta$. On a alors $\sin\alpha = \dfrac{MB}{AB}$ et $\sin\beta = \dfrac{NB}{AB}\cdot$ Il s'agit donc de montrer $MB < NB$.

Le fait que α est plus petit que β signifie que la demi-droite $[AM)$ est dans le secteur BAN. Elle coupe donc le segment $[NB]$ en P. Le triangle MBP est rectangle en M et on a donc $MB < PB$. Comme P est intérieur au segment $[NB]$, on a $PB < NB$, d'où le résultat.



1.2 *Remarque.* On utilise ici plusieurs résultats : la définition du sinus comme côté opposé sur hypoténuse (qui requiert de montrer que cela ne dépend pas du choix du triangle), le résultat sur les secteurs (voir par exemple [CF]) et le fait que l'hypoténuse est plus grande que les autres côtés (cela résulte de Pythagore, ou du fait que, dans un triangle, le plus grand angle est opposé au plus grand côté, qui est dans Euclide, voir sur ma page web, dans cette même rubrique).

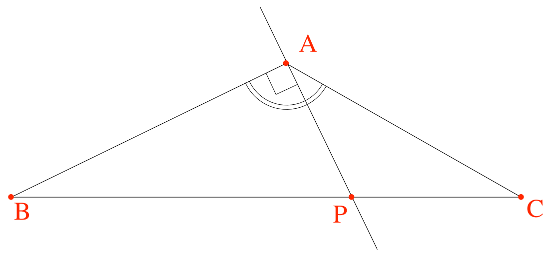
2 La voie des cordes

L'autre voie semble plus longue, mais les résultats intermédiaires sont aussi intéressants.

2.1 Le lemme de l'angle obtus

2.1 Lemme. *Soit ABC un triangle. On suppose l'angle $\widehat{A}$ obtus. Alors on a $BC > AB$ et $BC > AC$.*

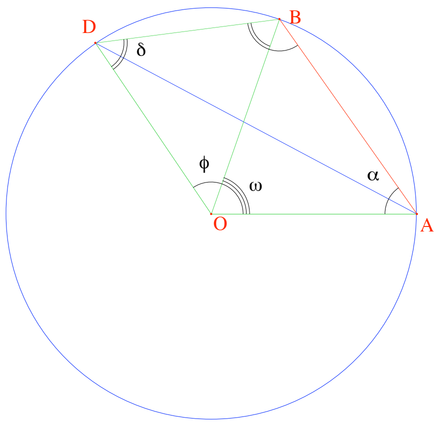
Démonstration. Montrons $BC > AB$, l'autre est analogue. On considère la droite perpendiculaire à (AB) en A. Comme l'angle est obtus, elle est intérieure au secteur BAC, donc coupe $[BC]$ en P. Le triangle ABP est rectangle en A et on a $AB < BP < BC$.



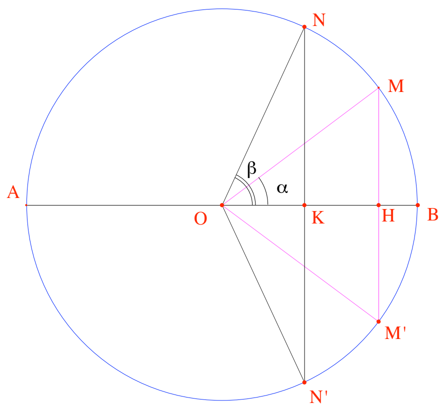
2.2 Le lemme de la corde

2.2 Lemme. *Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 1 et soient $\overparen{AB}$ et $\overparen{CD}$ deux arcs. On suppose que la longueur de $\overparen{AB}$ est plus petite que celle de $\overparen{CD}$ et que cette dernière est $\leq \pi$. Alors les longueurs des cordes sont dans le même ordre : $AB < CD$.*

Démonstration. Quitte à déplacer l'arc $\overparen{AB}$, on peut supposer qu'on a $A = C$. On considère alors le triangle ADB et il suffit de montrer que l'angle en B est obtus. Comme les triangles OAB et OBD sont isocèles, les deux angles en B sont égaux aux angles α en A et δ en D et sont complémentaires chacun de la moitié des angles ω et φ en O. On a donc $\widehat{B} = \alpha + \delta = \pi - \frac{1}{2}\widehat{O}$. Mais, comme l'arc $\widehat{CD}$ est $< \pi$, il en est de même de l'angle en O et donc l'angle en B est $> \pi/2$.



2.3 La croissance des sinus



2.3 Théorème. *Soient α, β deux angles aigus avec $\alpha < \beta$. On a* $\sin\alpha < \sin\beta$

Démonstration. On considère le cercle trigonométrique, voir figure ci-dessus. Il s'agit de montrer $MH < NK$, ou encore $MM' < NN'$. C'est le lemme de la corde (qui vaut car $2\beta < \pi$).