Exercices utilisant la calculatrice

Les exercices sont adaptés à la calculatrice Voyage 200 de Texas Instruments.

1. Analyse.

a) Suites, récurrentes et autres.

Faire tabuler une suite de la forme $u_n = f(n)$ (par exemple $u_n = \dfrac{2^n}{n^{20}}$ et examiner le résultat). Comment faire afficher les termes à partir du centième ? du millième ?

Faire tabuler une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ par la calculatrice et dessiner le graphe correspondant. Exemples parmi d'autres : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$, $u_{n+1} = \cos u_n$, $u_{n+1} = 8u_n - 3$, en variant, dans chaque cas, le point de départ u_0. (Pour la dernière, essayer $u_0 = 3/7$, éventuellement en faisant le calcul sous forme de fractions. Alors ?)

Même question pour les suites définies par $u_0 = 0,2$ et $u_{n+1} = ru_n(1 - u_n)$ avec $r = 0,8\,;\ 2,8\,;\ 3,2\,;\ 3,5\,;\ 3,55\,;\ 3,6$. Analyser et décrire le comportement de la suite obtenue selon les valeurs de r.

Tabuler les valeurs d'une suite récurrente double. Exemple : $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Tabuler aussi les valeurs de u_{n+1}/u_n et conjecturer sa limite.

Même question pour deux suites récurrentes associées. Exemple : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $u_0 = 1$, $v_0 = 2$.

b) Résolution d'équations.

Résoudre une équation $f(x) = 0$ à l'aide des fonctions *solve* (ou autre) de la machine, ou en utilisant la méthode de Newton, c'est-à-dire en étudiant la suite :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)},$$

ou encore en programmant une méthode de dichotomie (ne pas oublier le test d'arrêt). Exemples : $f(x) = x^3 - 2x - 5$, $f(x) = ln(x) - \dfrac{1}{x}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} - 1.$$

c) Somme de séries.

Calculer la somme des 1000 premiers termes d'une série donnée, soit à l'aide de la fonction Σ de la calculatrice, soit en programmant. Exemples : $u_n = \frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2},\ \frac{1}{\sqrt{n}}$ etc.

Comment utiliser une calculatrice qui fait du calcul formel pour retrouver les formules classiques donnant les sommes des n premiers entiers (resp. carrés, cubes, etc) ?

d) Calcul de valeurs approchées d'intégrales.

Calculer une valeur approchée de

$$ln(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

par la méthode des rectangles, des trapèzes, du point médian. Indication : il s'agit de calculer respectivement,

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \quad \text{ou} \quad T_n = \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{4n} \quad \text{ou} \quad M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2n+2k+1}$$

et on est ramené à *c)*. Vérifier le résultat et discuter les performances des méthodes. Même question pour l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x} dx.$$

Dans ce cas, vérifier le résultat avec les méthodes de calcul préprogrammées sur la calculatrice.

e) Fonctions.

Vérifiez que vous savez utiliser votre calculatrice graphique pour tracer le graphe d'une fonction, déterminer graphiquement ses extrema, ses inflexions, résoudre une équation $f(x) = \lambda$, même quand les points cherchés sont initialement hors de l'écran. On considère, par exemple, la fonction définie sur $[-2, +2]$ par

$$f(x) = 577x^3 - 816x^2 - 1154x + 1632.$$

Précisez à l'aide de la calculatrice graphique le sens de variation de f, ses extrema locaux et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

f) Utilisation du calcul formel.

• Calculer la dérivée seconde de $\dfrac{(x^2+1)\ln(x)}{(1-x)^5}$.
• Trouver la limite de la suite $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, de $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{3n+2}$.
• Retrouver les développements en série entière des fonctions usuelles, voire donner un développement limité de $f(x) = \tan(\sin x) - \sin(\tan x)$ en 0.
• Retrouver les formules de trigo, ou faire des calculs compliqués comme la linéarisation de $\cos^4 x \sin^3 x$.
• Calculer une primitive de $\cos^4 x$ ou de $x^7 e^x$.
• Calculer (exactement) la racine carrée de $1 + \frac{4}{9}\sqrt{5}$.
• Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{x^2}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$.

2. Arithmétique.

a) Bézout.

En utilisant l'algorithme d'Euclide, écrire un programme qui, à partir de deux nombres entiers positifs a, b donne leur *pgcd*, d, et des coefficients de Bézout associés, i.e. des entiers relatifs u, v vérifiant $au + bv = d$.
(Indication : on effectue la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ et on recommence avec b et r. Le dernier reste non nul est d. Les coefficients de Bézout sont obtenus en remontant l'algorithme.)

b) Le problème de Collatz.

On considère l'algorithme suivant. On part d'un entier $n > 0$. S'il est pair on le divise par 2, sinon on multiplie par 3 et on ajoute 1. On recommence. Que constate-t-on ? Programmer cet algorithme (sans oublier de mettre un test d'arrêt). Exemple : $n = 27$.

c) Les fractions égyptiennes.

Les anciens égyptiens utilisaient uniquement des fractions de numérateur 1. Bien sûr, tout nombre rationnel s'écrit comme somme de fractions égyptiennes : il suffit de répéter la même fraction : $\frac{p}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}$ (p fois) mais on peut montrer que tout rationnel s'écrit comme somme finie de fractions égyptiennes de dénominateurs tous différents.
L'algorithme donnant cette décomposition pour une fraction plus petite que 1 est le suivant. On part d'une fraction a/b ($a, b > 0$). On prend le plus petit entier n tel que l'on ait $\dfrac{1}{n} < \dfrac{a}{b}$, on retranche $1/n$ et on recommence. Programmer cet algorithme sur la calculatrice et décomposer ainsi les fractions suivantes :

$$\frac{57}{113}, \quad \frac{107}{191}, \quad \frac{2435}{67532}.$$

Que se passe-t-il pour une fraction plus grande que 1 ?

d) Nombres pseudo-premiers.

Un nombre p est dit **pseudo-premier** s'il vérifie $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ (donc aussi $2^p \equiv 2 \pmod p$). Écrire un programme permettant de tester si un nombre est pseudo-premier. Trouver un nombre pseudo-premier non premier.
Attention, si p est grand, le nombre 2^{p-1} risque d'être au-delà de la capacité de la calculatrice. Il ne faut donc pas calculer directement 2^{p-1} pour le réduire modulo p, mais il vaut mieux réduire les puissances de 2 modulo p chaque fois qu'on peut. Par ailleurs, pour calculer une puissance a^n modulo p, on pourra utiliser la méthode suivante : on divise n par 2, $n = 2q + r$ avec $r = 0$ ou 1 et on écrit $a^n = (a^2)^q\, a^r$. On ramène ainsi le calcul de a^n à des élévations au carré et des multiplications par a. L'usage des carrés rend cet algorithme beaucoup plus rapide que l'algorithme évident qui consiste seulement à multiplier par a à chaque pas.

Traiter la même question pour les nombres **pseudo-premiers forts** (ou nombres de Carmichaël), i.e. les p qui vérifient $a^p \equiv a \pmod p$ pour tout $a = 0, 1, 2, \cdots, p-1$. Trouver un nombre de Carmichaël non premier. (Attention, le programme risque de tourner un certain temps.)

Cet exercice est fortement inspiré de la seconde épreuve du CAPES 2003.

3. Utilisation de Cabri géomètre.

a) Droite d'Euler.

Tracer un triangle à l'aide de l'outil *triangle*. Tracer ses médiatrices, vérifier qu'elles sont concourantes en O (outil *appartient ?*). Tracer le cercle circonscrit. Tracer les médianes, vérifier qu'elles sont concourantes en G. Même travail avec les hauteurs qui concourent en H. Que pensez-vous des points O, G, H ? Tester votre conjecture en faisant varier le triangle. Demander à CABRI une confirmation.

b) Triangle d'aire maximale.

Tracer un cercle de centre O et un triangle ABC inscrit dans le cercle. Mesurer l'aire du triangle (outil *aire*). Faire varier les points A, B, C en essayant de rendre l'aire du triangle la plus grande possible. Quelle conjecture vous inspire l'expérience ? Tester votre conjecture en mesurant les angles du triangle (outils *marquer un angle* et *mesure d'angle*).

c) Partage.

Tracer un triangle ABC et prendre un point O. Tracer les triangles AOB et AOC (à l'aide de l'outil *triangle*). En utilisant l'outil *aire*, dire à quelle condition sur O les triangles AOB et AOC ont même aire.

d) La rivière.

Dessiner deux droites parallèles D_1 et D_2 (la rivière) et deux points A_1 et A_2 (les maisons), à l'extérieur de la rivière bien sûr, A_i du côté de D_i. Construire un segment $[M_1M_2]$ avec $M_i \in D_i$ et (M_1M_2) perpendiculaire à D_i (le pont). Où placer le pont pour que le trajet $A_1M_1M_2A_2$ soit minimum ? (On utilisera les outils *longueur* et *calculatrice*).

e) Podaire.

Tracer un cercle Γ et choisir un point A dans le plan. Prendre un point M sur Γ et tracer la tangente D à Γ en M. Soit N la projection de A sur D. Faire tracer le lieu de N lorsque M varie sur Γ, soit avec l'outil *lieu*, soit avec l'outil *trace* appliqué à N et l'outil *animation* appliqué à M.
Faire tracer plusieurs figures en changeant la position de A par rapport à Γ. Les courbes obtenues sont des limaçons de Pascal.

f) Néphroïde.

Tracer un cercle Γ de centre O et une droite D (ne coupant pas le cercle). Prendre un point M sur Γ, tracer la droite D' passant par M et parallèle à D, puis la droite Δ symétrique de D' par rapport à (OM). Faire tracer l'enveloppe de Δ (c'est-à-dire une courbe C telle que Δ soit toujours tangente à C quand M varie sur Γ). Pour cela appliquer l'outil *trace* à Δ et l'outil *animation* à M.
Où diable avez-vous déjà vu cette courbe ? (la néphroïde).
Traiter le même exercice avec cette fois Δ symétrique de (OM) par rapport à D' (on obtient une astroïde).