Tableur et développement décimal

Daniel PERRIN

1 Introduction

Je donne dans ce texte les éléments permettant de traiter les questions 2 et Q2 du dossier de CAPES du 18 juillet 2007.

Le problème est d'écrire le développement décimal illimité du rationnel $\frac{425}{11}$ et de retrouver l'expression donnée à la question 1) de l'exercice, à savoir $38,63636363\ldots$. L'unique intérêt de cette question est de vérifier que les candidats savent se servir d'un tableur (ici le tableur CellSheet de la Voyage 200, mais sur un ordinateur on peut utiliser Excel). Pour le reste, et sauf le respect que je dois[1] au jury, je trouve l'usage du tableur dans ce cas précis particulièrement inadapté. Je m'explique :

D'abord, s'agissant de trouver le développement décimal illimité d'une fraction aussi simple, avec une période aussi courte, la méthode la plus rapide est d'effectuer la division euclidienne à la main. C'est immédiat.

Ensuite, une autre méthode est de demander à la calculatrice, travaillant en mode approché, la valeur décimale de 425/11. Elle répond $38,6363636364$ et, si on l'oblige à montrer ce qu'elle garde secret, elle donne un 63 supplémentaire. On a donc le développement décimal illimité cherché.

On peut élever trois objections[2] à cette procédure. D'abord, pourquoi est-on sûr que la période est bien de longueur 2 ? On notera que l'objection vaut, de la même façon, pour l'utilisation du tableur. Dans tous les cas, il y a besoin d'un résultat théorique, par exemple le suivant :

Proposition 1.1. *Le développement décimal illimité d'un rationnel écrit sous forme de fraction irréductible* $\frac{a}{b}$ *est périodique avec une période de longueur* $\leq b-1$. *Précisément, si on écrit* $b = 2^\alpha 5^\beta q$ *avec* $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ *et* q *premier avec* 10, *la longueur de la période est le plus petit entier* n *tel que* $10^n \equiv 1 \pmod q$ *(l'ordre de* 10 *dans* $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$*). Si* α *et* β *ne sont pas tous deux nuls on a une prépériode de longueur* $\mathrm{Max}\,(\alpha, \beta)$.

La seconde objection c'est que cette procédure utilise la calculatrice comme une boîte noire et qu'on ne comprend pas l'algorithme utilisé. C'est vrai, mais, au moins si l'on emploie le tableur comme je le fais ci-dessous, cette objection demeure. En effet, pour effectuer la division euclidienne j'utilise la fonction *EntPréc* de la calculatrice, ce qui doit bien revenir à prendre une valeur décimale d'une fraction avant d'en chercher la partie entière ... pour en retrouver la partie décimale. Bien entendu, on pourrait programmer la division euclidienne directement, mais c'est beaucoup plus long.

La troisième objection est de dire que, si la calculatrice donne sans peine la période des onzièmes (car elle est de longueur 2), il n'en est plus de même pour celle des fractions de dénominateur 17, voire 59. Mais, là encore, il y a une réponse imparable : pour avoir la période d'une fraction a/b, disons avec b premier distincts de 2 et 5, lorsqu'elle est

[1] Que je doive le respect au jury peut se discuter, mais que les candidats le lui doivent est parfaitement clair. Si l'on veut être reçu au CAPES il vaut mieux ne pas dire au jury que sa question est idiote.

[2] J'essaie de me mettre à la place du jury.

trop longue pour l'affichage usuel, on demande à la machine de calculer $(10^{b-1}-1)a/b$. Elle s'éxécute sans rechigner, donnant instantanément, par exemple, les 58 chiffres de la période de 25/59, voire les 108 chiffres de la période des cent-neuvièmes. La même requête avec le tableur nécessite un temps de calcul important, sans compter le temps de l'écriture du programme et du recopiage vers le bas.

2 L'algorithme

2.1 Rappels

Je renvoie à mon papier sur les développements décimaux des nombres réels, cité [DP], pour des détails.

On considère un rationnel $x = a/b$. On commence par calculer sa partie entière $[x]$. Pour cela on effectue la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ et la partie entière de x est alors égale à q. Quitte à remplacer x par $x - [x]$, on peut supposer désormais qu'on a un rationnel x avec $0 \leq x < 1$.

Rappelons que la valeur décimale approchée par défaut de x à 10^{-n} près est l'unique décimal $x_n = q_n/10^n$ vérifiant $\dfrac{q_n}{10^n} \leq x < \dfrac{q_n+1}{10^n}\cdot$ L'entier q_n est la partie entière de $10^n x$, ou encore, le quotient dans la division euclidienne de $10^n a$ par b. On a donc $10^n a = bq_n + r_n$ avec $0 \leq r_n < b$.

Comme q_n est $< 10^n$, il s'écrit dans le système décimal :

$$q_n = a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \times 10 + a_n$$

où les a_i sont des entiers compris entre 0 et 9 et q_{n+1} s'obtient à partir de q_n en rajoutant un chiffre des unités[3] : $q_{n+1} = 10q_n + a_{n+1}$. Le point essentiel qui permet de définir l'algorithme de division est alors le suivant :

Proposition 2.1. *Avec les notations précédentes, a_{n+1} est le quotient dans la division euclidienne de $10r_n$ par b et le reste est alors r_{n+1}.*

Démonstration. On écrit $10^n a = bq_n + r_n$ et la même formule au cran suivant $10^{n+1}a = bq_{n+1} + r_{n+1}$. En multipliant la première expression par 10 et en soustrayant la seconde dans laquelle on a remplacé q_{n+1} par $10q_n + a_{n+1}$ il vient $10r_n = ba_{n+1} + r_{n+1}$. C'est bien ce qu'on voulait.

Remarque 2.2. On notera que c'est bien ce qu'on fait quand on effectue une division euclidienne avec l'algorithme usuel. Divisons par exemple $a = 1$ par $b = 7$. La partie entière est nulle. On a donc $q_0 = 0$ et $r_0 = 1$. Pour trouver a_1 on multiplie $r_0 = 1$ par 10 et on divise par 7 : $10 = 7 \times 1 + 3$. On a ainsi $a_1 = 1$ et $r_1 = 3$. Pour avoir a_2 on multiplie r_1 par 10 et on divise $10r_1 = 30$, toujours par $b = 7$. On obtient $30 = 7 \times 4 + 2$, d'où $a_2 = 4$ et $r_2 = 2$ et ainsi de suite.

2.2 L'algorithme

2.2.1 Division euclidienne

Dans ce qui suit, on aura besoin de faire la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. Avec la calculatrice, il y a plusieurs moyens pour cela, même si le plus

[3] Ce n'est pas évident, mais c'est prouvé dans [DP].

sérieux serait d'écrire un programme de division en copiant l'algorithme que l'on apprend à l'école primaire[4]. J'utilise ci-dessous la fonction *entPréc* (entier précédent ou encore partie entière). La fonction *entPréc* se trouve dans le menu Math (2nd 5), Nombre, 6. Quand on divise a par b, cette fonction donne q et il n'y a plus qu'à faire $a - bq$ pour avoir le reste. On peut aussi utiliser la fonction[5] *divEnt* qui fait le même travail.

Une autre méthode consiste à trouver le reste par la fonction *mod* (même menu[6]), puis à diviser $a - r$ par b pour avoir le quotient.

2.2.2 L'algorithme

On commence par faire la division euclidienne de a par b. On obtient un quotient q, qui est la partie entière de x et un reste r. On est ainsi ramené à calculer le développement de r/b qui est un rationnel compris entre 0 et 1.

L'algorithme est le suivant :

Entrées : deux entiers r et b avec $0 \leq r < b$ et un entier n : le nombre[7] de décimales souhaitées.

Sortie : n chiffres $a_1, \ldots, a_n$ compris entre 0 et 9.

On écrit la division euclidienne $10r = ab + s$ avec $0 \leq s < b$. On stocke s dans r et a dans a_1 et on recommence.

2.3 Mise en œuvre sur la Voyage 200

On conseille **vivement** de s'entraîner à utiliser le tableur dès maintenant pour en repérer les petits pièges.

On se donne $a, b \in \mathbf{N}^*$. Par exemple, ici, $a = 425$, $b = 11$.

Dans le menu APPS on sélectionne CellSheet. On fait *Nouveau* et on donne un nom au fichier, par exemple *ddi*. On arrive dans un tableau avec des lignes repérées par des chiffres et des colonnes par des lettres, et en bas une ligne qui sert à entrer les valeurs dans les cases (par *Enter*). Si l'on veut éviter que le tableur ne calcule bêtement à chaque modification introduite, on va dans *Format* (soit par la touche F1 suivie de 9, soit par $\diamondsuit$ F (la touche verte diamant suivie de F)) et à *AutoCalc* on répond *Non*. Si on fait cela, le calcul ne se fait pas tout seul, pour le lancer il faut appuyer sur F8.

Dans le tableau on sélectionne la cellule A1, on y rentre le nombre a et la cellule B1 où l'on rentre b.

2.3.1 La partie entière

On commence par faire calculer la partie entière q de a/b, ou encore le quotient dans la division $a = bq + r$. Contrairement à la suite, cette partie ne sera pas réitérée. On rentre en C1 la formule calculant q, à savoir = entPréc(A1/B1). **Attention**, ne pas oublier le signe =, sans quoi le calcul ne vaut que pour les valeurs actuelles des variables et ne s'actualise pas si l'on en change. Si l'on ne s'est pas trompé, le nombre 38 apparaît en C1.

[4] C'est un bon exercice de programmation.

[5] Elle n'est pas dans le menu Maths, mais on peut la taper au clavier ou la chercher dans Catalogue.

[6] Deux remarques : d'abord on peut taper *mod* au clavier directement, ensuite, il y a une autre fonction *reste* qui donne le même résultat, au moins pour les nombres positifs.

[7] Si l'on ne veut pas procéder à l'aveuglette, il faut déterminer ce nombre *a priori* en cherchant la longueur de la période comme expliqué en 1.1.

Remarques 2.3.
1) Si l'on n'a pas oublié le signe =, quand on se positionne sur la case C1, on voit apparaître, dans la ligne du bas, non pas 38, mais la définition de C1.
2) On peut mettre les lettres désignant les colonnes en minuscules, la calculatrice comprend aussi.

2.3.2 Les décimales

On rentre maintenant en A2 le reste r de la division, c'est-à-dire =A1-(B1*C1). Ici, il apparaît 7. Là encore, ce calcul est le seul de son espèce.

Puis, on rentre en C2 le quotient a_1 de la division de $10r$ par b (on a donc $10r = ba_1 + s$) à savoir = entPréc(10*A2/B1). **Attention** ici au dollar. Ce signe (qu'on trouve en F5), signifie que, dans la suite du calcul, cette quantité (qui est notre b) ne doit pas être incrémentée : c'est toujours le contenu de la cellule B1 qui va servir et pas celui (d'ailleurs vide) de B2, B3, etc. On trouve ici en C2 le résultat 6.

On définit ensuite A3 (qui est différent de A2). C'est le reste $s = 10r - ba_1$ de la division précédente c'est-à-dire = 10*A2-B1*C2. Attention là encore au signe = et au dollar. On trouve 4 ici.

L'algorithme est lancé, il n'y a plus qu'à le faire tourner. C'est ici qu'on utilise le principe du tableur : on recopie vers le bas les formules donnant A3 et C2, pour obtenir automatiquement celles qui donneront tous les Ai et les Ci. Pour cela, on sélectionne A3, par exemple (en se plaçant sur la case A3, surtout pas dans la ligne de calcul !). On le copie par ♢ C (ou F1 5). On le colle dans toutes les cases A4, A5, etc. (jusqu'au rang qu'on a choisi, disons ici[8] jusqu'à A10) en sélectionnant ces cases avec la touche majuscule et en faisant ♢V (ou F1 6). On fait de même pour les cases Ci à partir de C3.

Si on fait alors[9] F8, tout se calcule dans les lignes jusqu'au rang 10 et on voit apparaître une suite de 7 et de 4 dans la première colonne et une suite de 6 et de 3 dans la deuxième. C'est cette dernière qui donne $425/11 = 38,63636363...$.

On peut vérifier ce que fait le programme en se positionnant sur les cases Ai ou Ci. On voit apparaître les mêmes formules que celles entrées ci-dessus, mais incrémentées. Par exemple en A5 on a : = 10*A4-B1*C4. On voit ici que les dollars autour du B1 l'ont empêché de bouger.

Une autre technique, peut-être plus commode quand on veut recopier les résultats dans beaucoup de lignes, consiste à se placer sur la case A3, à aller dans F3 Edit, à choisir Remplir plage, à recopier la formule[10] définissant A3 à l'emplacement Formule, et à indiquer la zone de recopiage, par exemple A3 : A15. On fait ensuite la même manœuvre pour C2, puis on calcule par F8.

[8]Le rang minimum est le n vu plus haut, si b est premier avec 10, c'est le plus petit entier tel que b^n soit congru à 1 modulo b. Si l'on veut vérifier que la période se reproduit, il faut évidemment prendre un peu de marge

[9]Si l'on oublie cette opération on obtient des résultats aberrants.

[10]On peut entrer directement la formule dans cet écran, mais le dollar ne peut plus être obtenu par F5. Deux solutions : soit on copie la formule et on la colle, soit on va chercher le dollar dans le menu Char (en 2nd +), il se trouve dans la rubrique 3, Ponctuation, au numéro 4.