Développements décimaux des nombres réels

1. Rappels sur les nombres décimaux.

Rappelons qu'un nombre décimal est un rationnel qui admet une écriture fractionnaire de la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Le lecteur montrera qu'un nombre rationnel est décimal si et seulement si son écriture sous forme de fraction irréductible ne comporte que des 2 et des 5 en dénominateur.

Soit $x = \dfrac{a}{10^n}$ un nombre décimal, avec $a > 0$ et $n \geq 0$. L'entier a s'écrit, de manière unique, en base 10 : $a = \sum_{i=0}^{m} a_i 10^i = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \cdots a_1 \times 10 + a_0$, avec $m \geq 0$, les a_i entiers compris entre 0 et 9 et $a_m \neq 0$.
On en déduit une écriture de x sous une forme analogue, mais avec des puissances positives et négatives de 10 (on suppose ici $m \geq n$, le lecteur traitera l'autre cas) :

$$x = \sum_{i=0}^{m} a_i 10^{i-n} = a_m \times 10^{m-n} + \cdots + a_{n+1} \times 10 + a_n + \frac{a_{n-1}}{10} + \cdots + \frac{a_0}{10^n}.$$

Cette écriture est unique. On pose : $x = a_m a_{m-1} \cdots a_{n+1} a_n \, , a_{n-1} \cdots a_0$ en séparant par une virgule les chiffres correspondant aux puissances positives et négatives de 10.
Le nombre entier $N = a_m a_{m-1} \cdots a_{n+1} a_n$ est la partie entière de x. Le nombre $0, a_{n-1} \cdots a_0$ s'appelle la **partie décimale** de x.

Attention, il est essentiel de noter qu'un nombre décimal x n'a qu'un nombre fini de chiffres après la virgule. En particulier il ne faut pas confondre nombre décimal et développement décimal illimité d'un nombre rationnel ou réel (cf. ci-dessous).

2. Développement décimal d'un nombre réel.

a) Approximations décimales d'un réel.

Théorème 2.1.
Soient $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Il existe un unique décimal $x_n = \dfrac{q_n}{10^n}$ tel que l'on ait

$$(*) \qquad x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Le nombre x_n (resp. $y_n = x_n + 10^{-n}$) est la valeur décimale approchée à 10^{-n} près par défaut (resp. par excès) de x. L'entier q_n est la partie entière de $10^n x$.

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité. L'inégalité $(*)$ s'écrit :

$$\frac{q_n}{10^n} \leq x < \frac{q_n + 1}{10^n}.$$

On en déduit, en multipliant par 10^n, $q_n \leq 10^n x < q_n + 1$ ce qui montre $q_n = [10^n x]$. Cela montre l'unicité de q_n, donc de x_n et l'existence en résulte aussitôt en remontant le calcul.

Théorème 2.2.
Avec les notations de 2.1, les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x.

Démonstration. L'inégalité $(*)$ montre déjà que (x_n) et (y_n) convergent vers x. Par ailleurs, on a $q_n \leq 10^n x < q_n + 1$ d'où, en multipliant par 10 : $10q_n \leq 10^{n+1}x < 10q_n + 10$. Comme $q_{n+1} = [10^{n+1}x]$, on en déduit $10q_n \leq q_{n+1} \leq 10q_n + 9$ et, en divisant par 10^{n+1}, les inégalités $x_n \leq x_{n+1}$ et $y_{n+1} \leq y_n$. On note, au passage, que q_{n+1} s'écrit $q_{n+1} = 10q_n + a_{n+1}$ où a_{n+1} est un entier compris entre 0 et 9.

b) Développement décimal illimité d'un réel.

Le théorème 2.1, s'il permet d'affirmer que tout réel admet des valeurs décimales approchées à 10^{-n} près ne dit pas comment on passe des valeurs approchées de x à 10^{-n} près à celles du même x à $10^{-(n+1)}$ près. C'est l'objet du résultat suivant, dont la démonstration a été vue au cours de celle de 2.2 :

Proposition 2.3.
Soient $x \in \mathbf{R}$ et $x_n = \dfrac{q_n}{10^n}$ la valeur décimale approchée à 10^{-n} près par défaut de x. Pour tout $n \geq 0$ il existe un entier a_{n+1} vérifiant $0 \leq a_{n+1} \leq 9$ tel que l'on ait $q_{n+1} = 10q_n + a_{n+1}$. Si on écrit q_n en système décimal on obtient donc q_{n+1} en rajoutant à droite de q_n le chiffre des unités a_{n+1}.

Remarque 2.4. Ce que dit cette proposition c'est que les n premiers chiffres après la virgule de la valeur décimale approchée à $10^{-(n+1)}$ près sont les mêmes que ceux de la valeur approchée à 10^{-n} près.

La proposition 2.3 permet de définir le développement décimal illimité d'un réel x dans le cas $0 \leq x < 1$:

Corollaire et définition 2.5.
Soit x un réel vérifiant $0 \leq x < 1$ et notons, pour $n \geq 1$, $x_n = \dfrac{q_n}{10^n}$ son approximation décimale à 10^{-n} près par défaut. Soit a_i le chiffre des unités de q_i.
On a, pour tout $n \geq 1$:

$$q_n = a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \times 10 + a_n,$$

de sorte que q_n s'écrit $a_1 a_2 \cdots a_n$ en système décimal et on a donc

$$(**) \qquad x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = 0, a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Les entiers a_n, pour $n \geq 1$, sont uniquement déterminés par x et la suite (a_n) est le **développement décimal illimité** *de x. Comme la suite x_n tend vers x quand n tend vers l'infini, on peut noter, à la limite, $x = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$.*

Démonstration. Montrons, par récurrence sur n, la formule donnant q_n. Pour $n = 1$ on a $0 \leq x_1 = \dfrac{q_1}{10} \leq x < 1$, donc $0 \leq q_1 < 10$ et q_1 est donc égal à son chiffre des unités a_1 ce qui donne la formule voulue. Si on suppose la propriété établie à l'ordre n on en déduit aussitôt à l'ordre $n + 1$ grâce à la formule $q_{n+1} = 10q_n + a_{n+1}$.

Remarques 2.6.
1) Ce que dit ce corollaire c'est que le développement décimal illimité de x redonne la valeur approchée de x à 10^{-n} près par défaut en gardant seulement les n

premières décimales.
2) Si x est un réel quelconque on se ramène au cas d'un réel compris entre 0 et 1 en écrivant $x = [x] + (x - [x])$ où $x - [x]$ est un réel de $[0, 1[$.
3) En termes mathématiques, le développement décimal illimité d'un $x \in [0, 1[$ s'interprète comme la somme d'une série convergente : $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{10^i}$.
4) Attention, contrairement au cas des décimaux, il n'est pas facile de calculer sommes et produits en termes de développements décimaux illimités. Le lecteur se convaincra en tentant de calculer $0,44444\cdots + 0,77777\cdots$ qu'il peut y avoir des retenues à perte de vue.
5) En revanche, il y a une opération facile avec les développements décimaux illimités, c'est la multiplication par 10, ou plus généralement par 10^n. En effet, si on considère le nombre $x = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$, on a

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{10^i}, \quad \text{donc} \quad 10x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{10a_i}{10^i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{10^{i-1}} = a_1, a_2 \cdots a_n \cdots.$$

Proposition 2.7.
Le développement décimal illimité (a_n) d'un réel est **propre***, ce qui signifie que les a_i ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Supposons qu'on ait $a_i = 9$ pour tout $i \geq m + 1$. On a donc, pour $n \geq m + 1$, $x_n = x_m + \frac{9}{10^{m+1}} + \cdots + \frac{9}{10^n} = x_m + \frac{1}{10^m} - \frac{1}{10^n}$ et, comme $x_n \leq x$, on a $x_m + \frac{1}{10^m} - \frac{1}{10^n} \leq x$. Comme ceci vaut pour tout $n \geq m + 1$ cette inégalité large est encore vraie quand on fait tendre n vers l'infini. On obtient ainsi $x_m + \frac{1}{10^m} \leq x$, ce qui contredit la définition de x_m.

Remarque 2.8. On peut aussi considérer les développements impropres, mais ils sont inutiles : on peut toujours les remplacer par des développements propres. Par exemple, on a $1 = 0,999\cdots999\cdots$ (avec une infinité de 9). Il y a de nombreuses façons de se convaincre de ce résultat.
1) La première méthode est mathématique. On a $0,\underbrace{999\cdots9}_{n \text{ chiffres}} = 1 - \frac{1}{10^n}$ en vertu de 2.2. À la limite on a donc $0,999\cdots99\cdots = 1$.
2) Une méthode que l'on peut expliquer à un élève de collège consiste à poser $x = 0,999\cdots$ et à multiplier par 10. On obtient alors $10x = 9,999\cdots$, de sorte que l'on a $10x = 9 + x$, d'où $9x = 9$ et $x = 1$.
3) Enfin, pour des élèves encore plus jeunes on peut utiliser l'argument suivant : dès qu'on sait faire une division il est clair qu'on a $\frac{1}{3} = 0,33333\cdots$. En multipliant par 3 on obtient bien $1 = 0,99999\cdots$.

Proposition 2.9.
Les décimaux sont caractérisés par le fait que leur développement décimal illimité ne comporte qu'un nombre fini de chiffres non nuls.

c) Périodicité du développement décimal des rationnels.

Une constatation évidente, dès qu'on effectue des développements décimaux de rationnels est la répétition de suites de chiffres dans le développement. Par exemple, on a $\dfrac{1}{3} = 0,333\cdots333\cdots$, $\dfrac{2}{11} = 0,18181818\cdots$, $\dfrac{3}{7} = 0,428571428571428571\cdots$. On comprend facilement ce qui se passe en écrivant la division de a par b et en notant que, comme les restes ne prennent que b valeurs au plus, on retombe sur les mêmes chiffres au bout d'un nombre fini d'opérations. Nous allons expliquer ce phénomène et donner une idée de la longueur possible pour la période. Commençons par un lemme d'arithmétique :

Lemme 2.10.
Soit q un entier. Alors, q est premier avec 10 si et seulement si il existe n tel que $10^n \equiv 1 \pmod q$. Si on décompose q en produit de facteurs premiers : $q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ avec les p_i premiers différents de 2 et 5, l'entier $n = \varphi(q) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_r^{\alpha_r - 1}(p_r - 1)$ (indicatrice d'Euler de q) convient.

Démonstration. On considère l'anneau $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. Comme 10 est premier avec q on a une relation de Bézout : $\lambda \times 10 + \mu \times q = 1$ qui montre que l'image de 10 est dans le groupe $G = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$ des éléments inversibles pour la multiplication de $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. Si n est le cardinal de G, on a donc $10^n = 1$ dans G. L'assertion supplémentaire résulte du fait que le cardinal de G est $\varphi(q)$, voir, par exemple, D. Perrin, Cours d'algèbre, Ellipses, Ch. I, §7.

Proposition 2.11.
Soit $x = \dfrac{a}{b}$ un rationnel. On suppose b premier avec 10. Soit n un entier > 0 vérifiant $10^n \equiv 1$ modulo b (cf. 2.10). Alors, la suite des décimales de x admet une période de longueur n, c'est-à-dire qu'on a $a_i = a_{i+n}$ pour tout $i \geq 1$.

Démonstration. On écrit le développement décimal de x : $x = b_1 b_2 \cdots b_s, a_1 \cdots a_r \cdots$ et on multiplie par 10^n. On obtient, cf. 2.6.5 :

$$10^n x = b_1 \cdots b_s a_1 \cdots a_n, a_{n+1} a_{n+2} \cdots$$

de sorte que la partie décimale de $10^n x$ est $0, a_{n+1} a_{n+2} \cdots$. Mais, par hypothèse, on a $10^n = kb + 1$ avec $k \in \mathbf{N}$, donc $10^n \dfrac{a}{b} = ka + \dfrac{a}{b}$. La partie décimale de $10^n x$ est donc égale à celle de a/b c'est-à-dire à $0, a_1 a_2 \cdots a_r \cdots$. En identifiant les développements décimaux illimités de la partie décimale en question on obtient bien $a_1 = a_{n+1}$, $a_2 = a_{n+2}$ et, plus généralement, $a_i = a_{n+i}$.

Théorème 2.12.
Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors, x est rationnel si et seulement si son développement décimal illimité est périodique.

Démonstration.
1) Soit $x = \dfrac{a}{b}$ un rationnel. On suppose que le dénominateur de x s'écrit $b = 2^\alpha 5^\beta q$ avec q premier avec 10. Soit n un entier > 0 tel que l'on ait $10^n \equiv 1 \pmod q$. On pose $\gamma = \mathrm{Max}\,(\alpha, \beta)$ et on considère $y = 10^\gamma x$ qui est une fraction de dénominateur q. En vertu de 2.11, la suite des décimales de y est périodique de période n dès le premier terme. On a donc le développement

$$y = b_m \cdots b_1 b_0, a_1 a_2 \cdots a_n a_1 a_2 \cdots a_n a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

On obtient le développement de x en divisant par 10^γ, c'est-à-dire en déplaçant la virgule de γ crans vers la gauche. Le développement de x est alors :

$$x = b_m \cdots b_\gamma, b_{\gamma-1} \cdots b_1 b_0 a_1 a_2 \cdots a_n a_1 a_2 \cdots a_n a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

et il est bien périodique de période n à partir de la $\gamma + 1$-ième décimale. (On a supposé ici que m est $\geq \gamma$, mais la démonstration est analogue sinon.)

2) Réciproquement, on peut supposer $0 \leq x < 1$. Si le développement de x est périodique, on a $x = 0, b_1b_2 \cdots b_s a_1a_2 \cdots a_n a_1a_2 \cdots a_n a_1a_2 \cdots a_n \cdots$. En multipliant par 10^s on a donc $10^s x = b_1b_2 \cdots b_s, a_1a_2 \cdots a_n a_1a_2 \cdots a_n a_1a_2 \cdots = b_1b_2 \cdots b_s + 0, a_1a_2 \cdots a_n a_1a_2 \cdots a_n a_1a_2 \cdots$. On est ainsi ramené à montrer que le nombre $y = 0, a_1a_2 \cdots a_n a_1a_2 \cdots a_n a_1a_2 \cdots$ est rationnel. On multiplie alors par 10^n et on a $10^n y = a_1a_2 \cdots a_n, a_1a_2 \cdots a_n a_1a_2 \cdots = a_1a_2 \cdots a_n + y$, d'où $y = \dfrac{a_1a_2 \cdots a_n}{10^n - 1} \in \mathbf{Q}$.

Exemple 2.13.

Le nombre $0,45\,673\,673\,673 \cdots$ est rationnel. Le lecteur montrera qu'il vaut $\dfrac{11407}{24975}\cdot$

Remarques 2.14.

1) On notera la différence entre les fractions dont le dénominateur est premier à 10 et les autres. Dans le premier cas le développement est périodique dès le premier terme. Dans le second cas, le développement n'est périodique qu'à partir d'un certain rang, par exemple on a $\dfrac{3617}{7000} = 0,516\,714285\,714285\,714285 \cdots$.

2) On peut montrer que la longueur de la période est le plus petit entier $n_q(10)$ tel que $10^n \equiv 1 \pmod q$, c'est-à-dire l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$. C'est donc un diviseur du cardinal $\varphi(q)$ de ce groupe, mais il n'existe pas de règle générale permettant de prévoir le nombre $n_q(10)$. Voici quelques valeurs de $m(q) = n_q(10)$: $m(7) = 6$, $m(11) = 2$, $m(13) = 6$, $m(14) = 6$, $m(17) = 16$, $m(19) = 18$, $m(37) = 3$.

3) Un bon exercice d'utilisation de la calculatrice consiste à calculer explicitement le développement décimal illimité d'un rationnel (par exemple 1/17, 3/19, etc.).

d) Cardinal de $\mathbf{R}$.

Voici une application des développements décimaux illimités à la cardinalité :

Théorème 2.15.
Le corps des réels n'est pas dénombrable.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant $\mathbf{R}$ dénombrable. *A fortiori*, l'ensemble des réels compris entre 0 et 1 serait lui aussi dénombrable. Cela signifie qu'on pourrait numéroter les réels de $[0, 1]$: $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, cette suite les épuisant tous. Nous allons montrer que ceci est impossible en fabriquant un réel de $[0, 1]$, distinct de tous ceux de la suite (x_n).

Pour cela on considère les développements décimaux illimités de $x_1, \cdots x_n, \cdots$ et on construit x en se donnant son développement décimal illimité (propre) $x = 0, a_1a_2 \cdots a_n \cdots$ comme suit. On choisit a_1 différent du premier chiffre après la virgule de x_1 et de 9 (pour éviter les développements impropres). C'est possible puisque on doit juste éviter deux chiffres parmi dix. On choisit ensuite a_2 distinct de 9 et du deuxième chiffre après la virgule de x_2, et ainsi de suite, on choisit a_n distinct de 9 et du n-ième chiffre après la virgule de x_n. Comme la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ converge, on a bien construit ainsi un nombre réel. De plus, il est différent de tous les termes de la suite. En effet, il est différent de x_1 car ils n'ont pas le même premier chiffre après la virgule, de x_2 à cause du deuxième chiffre, de x_n à cause du n-ième chiffre : cqfd.