Les Misérables sont dans les puissances de 2

Daniel PERRIN

1 Le résultat et ses conséquences

1.1 Théorème. *Soit b un entier > 1 qui n'est pas une puissance de 2 et soit a un entier vérifiant $1 \leq a < b$. Il existe un entier $n > 0$ (et même une infinité) tel que l'écriture de 2^n en base b commence par a.*

1.2 Corollaire. *Les Misérables*[1] *sont dans les puissances de* 2.

Démonstration. On numérise *Les Misérables* en base 10 par un procédé quelconque. On obtient un (grand) nombre a qui s'écrit en écriture décimale $\overline{a_s \dots a_1 a_0}$ et on choisit r tel que $a < 10^r = b$. Il existe une puissance de 2 qui commence par a en base b et on a donc : $ab^m \leq 2^n < (a+1)b^m$, soit $a10^{rm} \leq 2^n < (a+1)10^{rm}$ ou encore :

$$a_s 10^{rm+s} + \cdots + a_1 10^{rm+1} + a_0 10^{rm} \leq 2^n < a_s 10^{rm+s} + \cdots + a_1 10^{rm+1} + a_0 10^{rm} + 10^{rm}.$$

Cela montre que les premiers chiffres de 2^n sont exactement $\overline{a_s \dots a_1 a_0}$.

1.3 *Remarque.* Bien entendu, pour *Les Misérables*, le n va être grand. On aura un n plus petit si l'on permet que le texte soit écrit dans 2^n mais pas nécessairement au début. Par exemple, le nombre 9 apparaît dans $2^{12} = 4096$, mais n'est en tête que dans 2^{53}. Par exemple encore, mon nombre fétiche 1729 apparaît dans 2^{139}, mais je ne sais pas jusqu'où il faut aller pour le voir en tête.

2 La preuve

On rappelle le résultat facile :

2.1 Théorème. *Soit α un irrationnel. Le sous-groupe additif A de $\mathbf{R}$ engendré par 1 et α est partout dense.*

On a aussi son corollaire, un peu moins évident :

2.2 Corollaire. *Soit α un irrationnel. L'ensemble $A^+ = \{n\alpha + m > 0 \mid n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{Z}\ \}$ est partout dense dans $\mathbf{R}^+$.*

1. Ou n'importe quoi, par exemple la Bible ou le Coran.

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $z \in A^+$ dans l'intervalle $I =]0, \epsilon[$, car ensuite, par addition, on a des éléments de A^+ dans tout intervalle de largeur ϵ. On sait qu'il y a une infinité d'éléments du sous-groupe A dans l'intervalle I, soit $x = p\alpha + q$ un tel élément. S'il en existe avec $p > 0$ on a fini. Sinon, on choisit un tel x avec $p < 0$. Je dis qu'il existe $y = r\alpha + s \in A$, dans l'intervalle $J =]0, x[$, avec $r < p < 0$. En effet, il y a une infinité d'éléments $r\alpha + s$ dans J, tous avec $r < 0$. Pour un r fixé, il y en a seulement un nombre fini qui sont dans J, donc aussi pour $p \leq r < 0$. Il y en a donc d'autres dans J, qui vérifient $r < p$, d'où le y. Mais alors, $z = x - y$ s'écrit sous la forme voulue et il est dans I.

On a ensuite le lemme :

2.3 Lemme. *Le nombre $\alpha = log_b(2)$ est irrationnel.*

Démonstration. Dire qu'on a $\alpha = p/q$ signifie $b^p = 2^q$ ce qui est impossible par hypothèse.

On peut maintenant prouver le théorème. On cherche des entiers **positifs** m, n tels que l'on ait $ab^m \leq 2^n < (a+1)b^m$ ou encore, en prenant le logarithme en base b, $m + log_b a \leq n\alpha < m + log_b(a+1)$, soit encore $log_b a \leq n\alpha - m < log_b(a+1)$. En vertu du lemme et du corollaire, on a (une infinité de) $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{Z}$ vérifiant ces inégalités, donc aussi $ab^m \leq 2^n < (a+1)b^m$. Mais, il est clair que cela impose aussi $m > 0$ (car, si m est < 0, $(a+1)b^m$ est < 2) et on a gagné.