Calculatrices et conjectures

L'exercice qui suit est un exemple d'utilisation d'une calculatrice en arithmétique pour formuler des conjectures. Il s'agit de décrire les périodes des développements décimaux illimités des rationnels.

1) Les septièmes.

1) Calculer avec la calculatrice les valeurs décimales approchées des nombres $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\ldots$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{7}$, $\ldots$, $\frac{13}{7}$, $\frac{15}{7}$, etc.

Étudier la partie décimale des nombres obtenus. Que constate-t'on ?

On doit voir l'existence d'une période, de longueur 6*, constater que les chiffres sont toujours les mêmes pour deux fractions différentes, dans le même ordre, mais pas avec le même premier chiffre et que les* 6 *possibilités de premier chiffre sont toutes présentes :*

$$\frac{1}{7} = 0,142857\,142857\cdots \qquad \frac{2}{7} = 0,285714\,285714\cdots \qquad \frac{3}{7} = 0,428571\,428571\cdots$$

$$\frac{4}{7} = 0,571428\,571428\cdots \qquad \frac{5}{7} = 0,714285\,714285\cdots \qquad \frac{6}{7} = 0,857142\,857142\cdots$$

et qu'elles se reproduisent ensuite régulièrement. Cet exercice est essentiellement un exercice de formulation : dire ce qu'on voit, tout ce qu'on voit, rien que ce qu'on voit.

2) Expliquer pourquoi la partie décimale de $\frac{1}{7}$ est la même que celle de $\frac{8}{7}\cdot$ Généraliser cette propriété.

Bien entendu la partie décimale ne dépend que de la congruence modulo 7*, i.e. du reste dans la division par* 7*. C'est la première remarque fondamentale.*

3) Comparer le développement de $\frac{1}{7}$ et celui de $\frac{3}{7}\cdot$ Expliquer pourquoi ce décalage d'un chiffre. (On se souviendra de l'effet de la multiplication par 10 sur un développement décimal.) Même question pour $\frac{1}{7}$ et $\frac{2}{7}\cdot$ Généraliser.

Il s'agit de noter que la multiplication par 10 *décale de* 1 *le développement décimal : c'est la deuxième remarque fondamentale. Vu la première remarque fondamentale, il reste à calculer les restes successifs des puissances de* 10 *modulo* 7*. On a alors*[1] $10 \equiv 3$, $100 \equiv 30 \equiv 2$, $1000 \equiv 20 \equiv 6$, $10^4 \equiv 60 \equiv 4$, $10^5 \equiv 40 \equiv 5$ *et* $10^6 \equiv 50 \equiv 1$. *Le fait que* 10^6 *soit congru à 1 explique la longueur de la période (pourquoi ?). L'ordre des puissances donne les décalages successifs d'un chiffre :* $1, 3, 2, 6, 4, 5$.

2) Les treizièmes.

[1] Bien entendu, il est bien plus astucieux de calculer avec les représentants ± 1, ± 2, ± 3 des restes.

1) Calculer avec la calculatrice les valeurs décimales approchées des nombres $\dfrac{a}{13}$ pour $a = 1, 2, \cdots, 12, 14, \cdots, 25$.
Étudier la partie décimale des nombres obtenus. Noter les points communs avec le cas des septièmes et les différences.

Dans ce cas, il y a encore une période de 6*, mais il y a deux types de développements distincts dont voici les prototypes :*

$$\frac{1}{13} = 0,076923\,076923\cdots \quad \text{et} \quad \frac{2}{13} = 0,153846\,153846\cdots.$$

Les autres sont identiques à l'un ou l'autre, mais avec un point de départ différent. Par exemple on a :

$$\frac{3}{13} = 0,230769\,0230769\cdots \qquad \frac{7}{13} = 0,538461\,538461\cdots$$

2) Expliquer comment on passe du développement de $\dfrac{1}{13}$ à celui de $\dfrac{10}{13}$ puis à celui de $\dfrac{9}{13}$.
Expliquer de même comment on passe du développement de $\dfrac{2}{13}$ à celui de $\dfrac{7}{13}$.
Formuler une méthode générale pour prédire la partie décimale du développement de $\dfrac{a}{13}$ où a est un entier premier avec 13.

C'est toujours la multiplication par 10*. La similitude de période entre les deux cas vient du fait que* 10 *est d'ordre* 6 *dans* $(\mathbf{Z}/13\mathbf{Z})^*$ *comme dans* $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*$*. Mais cela implique aussi que si on regarde les restes des puissances de* 10 *modulo* 13*, ils ne sont que* 6 *à savoir* $1, 10, 9, 12, 3, 4$*. Les restes qui ne sont pas de cette forme peuvent par exemple s'écrire sous la forme* 2×10^n*.*

3) Les quarante et unièmes rugissants.

Calculer avec la calculatrice les valeurs décimales approchées des nombres $\dfrac{a}{41}$ pour $a = 1, 2, \cdots, 20\cdots$.
Procéder aux constatations d'usage et, avec l'expérience des cas précédents, donner une explication de la répartition des développements.

Cette question est plus difficile, mais les idées qui la sous-tendent sont les mêmes. Cette fois, la période est de 5 *(car on a* $10^5 \equiv 1 \pmod{41}$ *:* 41 *est diviseur de* $99999 = 9 \times 41 \times 271$*). Il y a donc* 8 *classes différentes de développements. Elles correspondent aux restes de la forme* $a \times 10^n$ *avec* $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 15$*. Si l'on veut être savant, ces classes sont simplement les* 8 *classes du groupe à* 40 *éléments* $(\mathbf{Z}/41\mathbf{Z})^*$ *modulo le sous-groupe à* 5 *éléments engendré par le reste* 10*.*

4) Question subsidiaire.

Que se passe-t'il dans le cas général ?