Primitives et intégrales

Daniel PERRIN

Je donne ici des éléments pour traiter l'exposé de CAPES 53 (liste 2013) : *Intégrales, primitives.* On trouvera à la fin une proposition de plan d'exposé.

Ce texte est conforme au programme de Terminale S de 2011. Le lecteur trouvera des détails et notamment un historique des programmes dans mon papier [1] *Aires, intégrales et primitives*, voir :
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/conferences.html`.

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ (ni vide, ni réduit à un point).

1 Primitives

1.1 Définition. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbf{R}$ (ou une réunion d'intervalles). On dit que la fonction $F : I \to \mathbf{R}$ est une* **primitive** *de f si F est dérivable et si l'on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

1.2 Proposition.
1) Si F est une primitive de f il en est de même de $F + k$ où k est une fonction constante.
2) Si F et G sont deux primitives de f sur un **intervalle** *I, la différence $F-G$ est une constante. En particulier on a, pour tous $a, b \in I$, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.*
3) Soient I un intervalle, $c \in I$ et $k \in \mathbf{R}$. Si f admet une primitive F sur I, il existe une unique primitive G de f qui vérifie $G(c) = k$.

Démonstration. Le point 1) est clair. Pour 2) on a $(F-G)' = 0$, donc $F-G$ est une constante k. On en déduit $G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$. Le dernier point se voit en ajustant la constante.

1.3 *Remarques.*
1) Dans 2), on utilise de manière essentielle le fait que I est un intervalle. Sur une réunion d'intervalles disjoints on peut avoir plusieurs primitives. Par exemple, la fonction nulle sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$ admet comme primitives les fonctions qui valent une certaine constante sur $]-1, 0[$ et une autre sur $]0, 1[$.

1. D'ailleurs, du dire même de ses concepteurs, l'actuel programme s'inspire de ce texte. C'est bien le seul point positif de ce programme.

Un exemple de fonction naturellement définie sur une réunion d'intervalles est celui de la fonction $\sqrt{x^2-1}$ qui est définie sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.
2) Une fonction qui admet une primitive est la dérivée d'une fonction. Il est connu qu'alors elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Il en résulte que la fonction partie entière sur $[0,2]$ n'a pas de primitive.

2 Aires

On admet l'existence de la notion d'aire et ses propriétés essentielles. Précisément, on admet qu'il existe une application $\mu : \mathcal{Q} \to \mathbf{R}^+$, appelée mesure d'aire, définie sur certaines parties de $\mathbf{R}^2$ dites quarrables et qui vérifie les propriétés suivantes [2] :

1) Les polygones sont quarrables, ainsi que l'hypographe d'une fonction f continue et positive sur un segment (la partie limitée par l'axe des x, le graphe de f et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, voir figure ci-dessous).

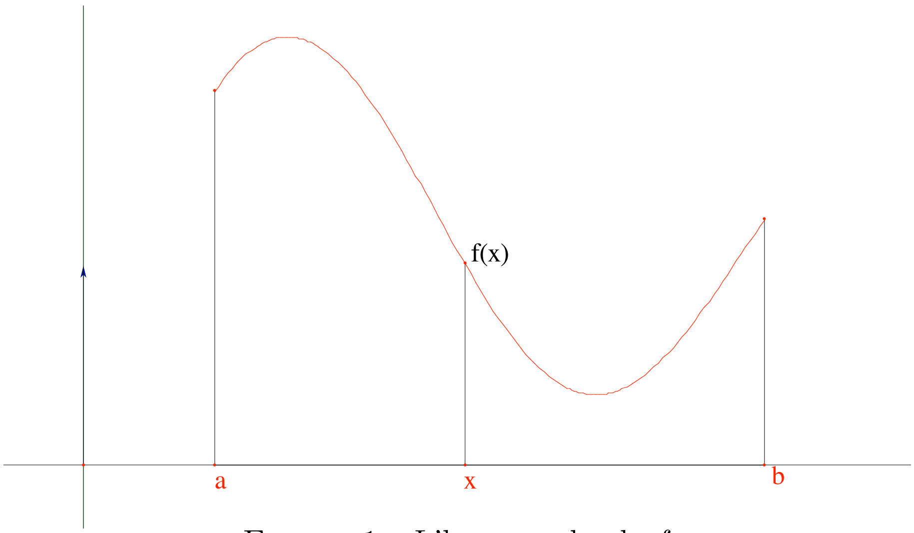

Figure 1 – L'hypographe de f

La démonstration de cette dernière propriété n'est pas évidente et repose sur la continuité uniforme de f.

2) La mesure du carré unité bâti sur les axes est égale à 1.

3) La mesure est additive : si A, B sont des parties quarrables disjointes, on a $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$. C'est encore vrai si les parties sont presque

2. Sur ce thème, voir *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011, cité [ME] dans ce qui suit, notamment pour des précisions sur la différence entre aire et mesure d'aire.

disjointes i.e. si leur intersection est une réunion finie de segments [3]. Un corollaire de cette propriété est la croissance de μ : si on a $A \subset B$ on a $\mu(A) \leq \mu(B)$.

4) La mesure est invariante par isométrie : si g est une isométrie on a $\mu(g(A)) = \mu(A)$.

5) Elle est homogène : si h est une homothétie de rapport k on a $\mu(h(A)) = k^2\mu(A)$.

On montre que la mesure d'un rectangle R dont les côtés sont de longueurs a et b est égale à ab. Il faut être conscient que ce résultat, avec lequel chacun est familier depuis l'école primaire, est facile si l'on dispose de la propriété 5) mais que sinon, il nécessite un passage à la limite, voir [ME] p. 216 et 237.

3 Intégrale d'une fonction continue positive

3.1 Définition

3.1 Définition. *Soient $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue ≥ 0. On appelle* **intégrale** *de a à b de f et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ la* **mesure** *de l'aire de l'hypographe de f, avec l'unité d'aire choisie ci-dessus.*

C'est la définition du programme actuel de TS (à ceci près que le mot "mesure"est souvent omis).

3.2 Lien avec les primitives

Le théorème essentiel est le suivant.

3.2 Théorème. *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue ≥ 0. La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f. Précisément, c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Si G est une primitive quelconque de f on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$.*

Démonstration.

On traite seulement le cas monotone, disons croissant. On calcule le taux d'accroissement $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$, disons pour $h > 0$.

3. Il faut savoir justifier le fait qu'un segment est d'aire nulle, par exemple, s'il est de longueur l, en l'englobant dans des rectangles de longueur l et de largeur ϵ et en faisant tendre ϵ vers 0.

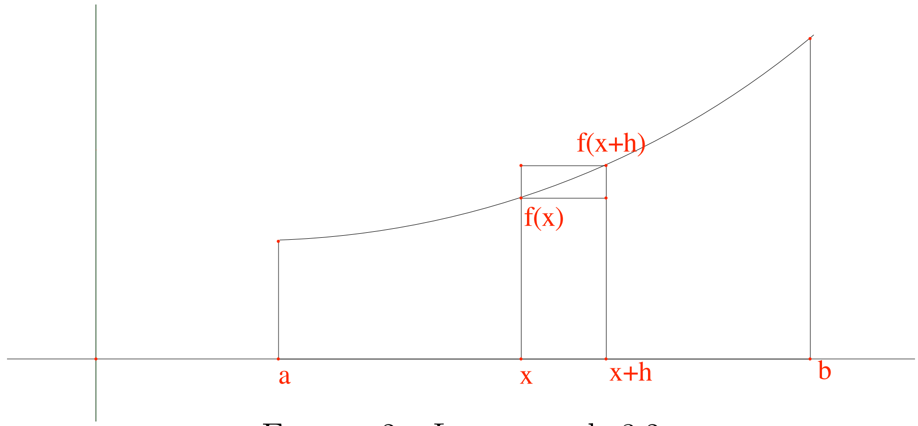

FIGURE 2 – La preuve de 3.2

La quantité $F(x+h)-F(x)$ est l'aire de l'hypographe entre les abscisses x et $x+h$. Comme cette partie est comprise entre deux rectangles de largeur h et de longueurs $f(x)$ et $f(x+h)$ on a : $hf(x) \leq F(x+h)-F(x) \leq hf(x+h)$, d'où $f(x) \leq \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x+h)$. Quand h tend vers 0, comme f est continue, les deux extrêmes tendent vers $f(x)$, donc aussi le taux d'accroissement et on a donc, par définition de la dérivée, $F'(x) = f(x)$.

On a la formule $F(b) = \int_a^b f(t)dt$. Comme $F(a)$ est nulle, on a donc encore $F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)dt$. Si G est une autre primitive de f, la formule vaut aussi avec G en vertu de 1.2.2.

3.3 *Remarques.* 1) Il faut être capable de traiter les cas f continue non monotone et $h < 0$ si le jury le demande. Pour $h < 0$ il n'y a pas de difficulté. On a les inégalités :

$$-hf(x+h) \leq F(x) - F(x+h) \leq -hf(x)$$

et l'inégalité est la même qu'auparavant pour le taux d'accroissement. Pour une fonction continue quelconque, il y a deux voies.

• On introduit le minimum m_h et le maximum M_h de f sur $[x, x+h]$, en supposant qu'ils existent, ce qu'un élève de TS admettra sans peine. On a les inégalités :

$$hm_h \leq F(x+h) - F(x) \leq hM_h$$

et la conclusion vient du fait que, comme f est continue en x, m_h et M_h tendent tous deux vers $f(x)$ quand h tend vers 0.

• On utilise directement la continuité de f en ϵ, η (ce qui disqualifie cette preuve au niveau TS). On se donne $\epsilon > 0$ et on doit montrer que, pour $|h| < \eta$, on a $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| < \epsilon$. Comme f est continue, il existe η tel que, si t est dans $[x, x+h]$ avec $|h| < \eta$ on a $f(x) - \epsilon < f(t) < f(x) + \epsilon$.

L'aire de l'hypographe entre x et $x+h$ est alors comprise entre $h(f(x)-\epsilon)$ et $h(f(x)+\epsilon)$ et on a le résultat.

2) Il y a des fonctions non continues qui admettent des primitives. Par exemple la fonction définie par $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et par $f(0) = 0$ n'est pas continue en 0 mais admet la primitive F définie par $F(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $F(0) = 0$.

3.4 Corollaire.
1) Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors, f admet des primitives.
2) La même assertion est encore valable sur un intervalle I quelconque.

Démonstration. 1) On admet [4] que f est minorée par une constante m. On considère $g = f - m$ qui est continue ≥ 0. La fonction g admet une primitive G et f admet la primitive $F(x) = G(x) + mx$.

2) On définit une primitive F de f comme suit. On fixe un point $c \in I$. Soit x un point de I et soient $a,b \in I$ avec $a < b$ tels que $x, c \in [a,b]$. Il existe une unique primitive $G_{a,b}$ de f sur $[a,b]$ qui est nulle en c. On pose $F(x) = G_{a,b}(x)$. Cette définition est indépendante du choix de a et b. En effet, si on a deux autres points a' et b' vérifiant les mêmes conditions, les primitives $G_{a,b}$ et $G_{a',b'}$ coïncident sur $[a,b] \cap [a',b']$ en vertu de 1.2, donc elles sont égales en x. Il est clair que F convient.

3.5 *Remarque.* Une autre voie pour prouver l'existence d'une primitive d'une fonction continue f de signe quelconque est de définir les fonctions $f^+ = \mathrm{Max}\,(f,0)$ et $f^- = \mathrm{Max}\,(-f,0)$, de montrer qu'elles sont continues (c'est le point délicat) et qu'on a $f = f^+ - f^-$. Comme f^+ et f^- sont positives, elles ont des primitives G et H et $G - H$ est une primitive de f.

4 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

4.1 Définition

Pour une fonction positive, les choses sont claires, l'intégrale c'est l'aire sous la courbe. On a vu en 3.2 que, si F est une primitive de f, on a alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Cette formule est une première justification de la définition suivante, qui vaut pour une fonction de signe quelconque et sans supposer la condition $a < b$ sur les bornes :

4. Il faut avoir une idée de la preuve. On peut par exemple le faire par dichotomie.

4.1 Définition. *Soient $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue, a et b des points de I et soit F une primitive*[5] *de f sur I. On définit l'intégrale de a à b de f par la formule* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

4.2 *Remarque.* Avec la définition ci-dessus, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ est une primitive de f sur I.

4.2 Discussion

On peut donner une justification supplémentaire de la définition ci-dessus en voyant l'intégrale comme une aire "orientée".

On considère une fonction continue définie sur un intervalle I, de signe constant, mais pas nécessairement ≥ 0, et deux points $a, b \in I$ (on ne suppose pas $a < b$). On considère son hypographe H et le bord orienté ∂H qui est la courbe fermée simple constituée du segment $[a, b]$, parcouru de a vers b, puis du segment vertical qui va de $(b, 0)$ à $(b, f(b))$, puis du graphe de f allant jusqu'à $(a, f(a))$ puis du segment vertical qui joint ce point à $(a, 0)$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ sera alors l'aire de l'hypographe, mais comptée positivement (resp. négativement) si ∂H tourne dans le sens trigonométrique (resp. dans le sens des aiguilles d'une montre). En particulier, l'aire sera négative si on a $a < b$ et $f \leq 0$ ou $a > b$ et $f \geq 0$. Examinons ces deux cas et montrons que l'intégrale ainsi définie est bien donnée par la formule $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.

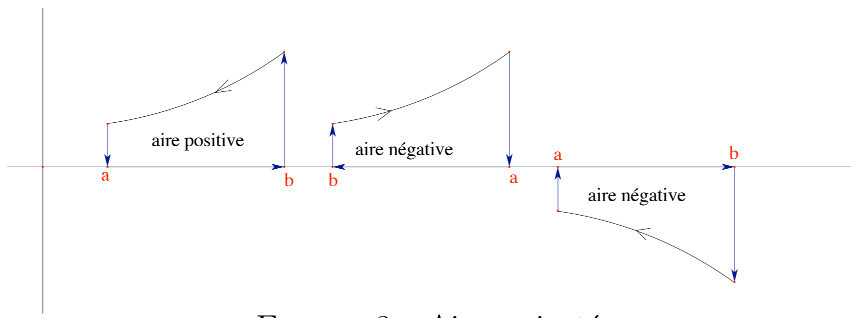

FIGURE 3 – Aires orientées

Si on a $a < b$ et f négative, l'aire de l'hypographe, en valeur absolue est la même que celle de l'hypographe de $-f$ en vertu de l'invariance de l'aire par symétrie. Notons α cette aire. Si F est une primitive de f, $-F$ en est une

5. Il en existe par 3.4.

de $-f$ et on a $\alpha = (-F)(b) - (-F)(a)$ en vertu de 3.2. Comme l'intégrale, par convention, doit être négative, c'est bien $-\alpha = F(b) - F(a)$.

Si maintenant on a $a > b$, mais $f \geq 0$, c'est l'intégrale de b à a qui est positive et vaut $F(a) - F(b)$. Comme l'intégrale de a à b correspond à la même aire, comptée négativement, c'est encore $F(b) - F(a)$.

4.3 *Remarque.* Si f n'est pas de signe constant, mais n'a qu'un nombre fini de changements de signe, ce qui précède permet encore de définir directement son intégrale. Attention, il y a des fonctions continues qui changent beaucoup de signe, par exemple $f(x) = x \sin \frac{1}{x}\cdot$

4.3 Propriétés

4.4 Proposition. *Soient I un intervalle de* $\mathbf{R}$, $f, g : I \to \mathbf{R}$ *deux fonctions continues et* $a, b, c \in I$. *On a les propriétés suivantes :*
1) **(Relation de Chasles)** *On a* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$, $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$.
2) **(Linéarité)** *Pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ *on a* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$.
3) **(Positivité)** *On suppose* $a \leq b$. *Si* $f(t)$ *est* ≥ 0 *pour tout* $t \in [a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est* ≥ 0. *Si on a* $f \leq g$, *on a* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Démonstration. Avec la définition 4.1 les preuves sont très faciles. En revanche, avec la définition 3.1 ce n'est pas le cas, même en se limitant aux fonctions positives. Le lecteur réfléchira par exemple à la formule $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Montrons Chasles. Si F est une primitive de f, il s'agit de prouver les formules : $F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$, $F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$ et $F(a) - F(a) = 0$. On devrait y arriver.

Pour la linéarité, on note que $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ et il s'agit de vérifier alors $(\lambda F + \mu G)(b) - (\lambda F + \mu G)(a) = \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a))$. Là non plus il n'y a pas de difficulté.

Enfin, la positivité est évidente avec la définition 3.1.

4.5 *Remarques.*
1) Pour la positivité, attention à la condition $a \leq b$. Une question piège est

la suivante : soit x un réel positif. Quel est le signe de $\displaystyle\int_x^{x^2} \ln t \, dt$?
2) On peut aussi énoncer des résultats concernant la parité, les périodes, etc.

5 Applications

5.1 Formule de la moyenne

Il s'agit de l'énoncé suivant :

5.1 Proposition. *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Il existe un point $c \in [a,b]$ qui vérifie :*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

La valeur $f(c)$ est appelée **valeur moyenne** *de f sur $[a,b]$.*

Démonstration. Soient m et M les bornes de f. On admet qu'elles existent et sont atteintes. Alors, l'intégrale I est comprise entre $m(b-a)$ et $M(b-a)$. Il en résulte que $\frac{I}{b-a}$ est compris entre m et M. Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{I}{b-a}$.

5.2 L'inégalité des accroissements finis

5.2 Proposition. *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe m et M tels que l'on ait $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors, on a* **l'inégalité des accroissements finis** *:*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$ et d'appliquer la croissance de l'intégrale.

5.3 Autres applications

• Montrer la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour $a, b > 0$ en utilisant le fait que $\ln(x)$ est une primitive de $1/x$ (étudier la fonction $\ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$).

• Pour une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, périodique de période T, montrer les deux formules :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

pour tous $a, b \in \mathbf{R}$. (Pour la première, remplacer b par x et dériver par rapport à x, pour la seconde, utiliser la relation de Chasles avec les bornes $a, 0, T, a+T$. Au niveau BTS on peut aussi utiliser un changement de variables.)

5.4 La quadrature de la parabole

On considère la parabole d'équation $y = x^2$ et on cherche à calculer, par exemple, l'aire de la partie située au-dessus de la courbe et en dessous de la droite d'équation $y = 1$ (ce domaine est ce qu'on appelle un segment de parabole), ou, ce qui revient au même, l'aire de la partie limitée par l'axe des x, les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$ et la courbe. Par symétrie, cette aire est double de celle de sa moitié droite E, définie par $x \geq 0$.

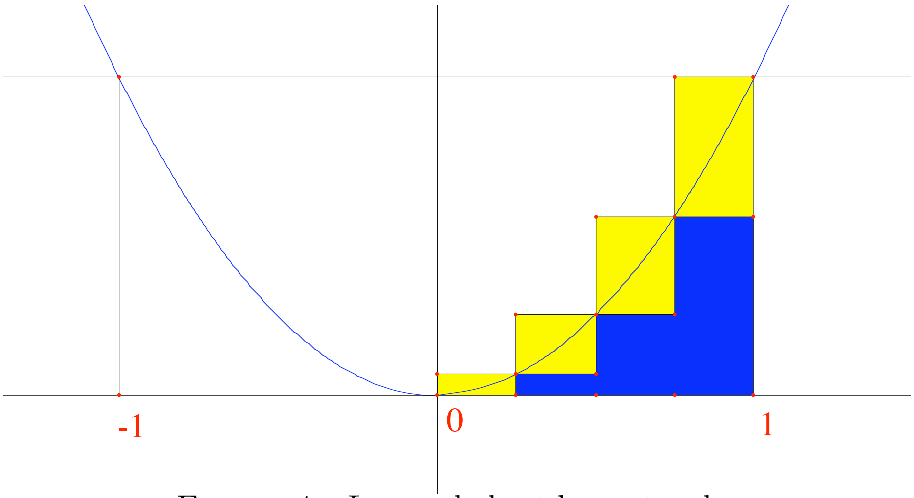

FIGURE 4 – La parabole et les rectangles

5.4.1 Avec les primitives

Avec le calcul intégral le calcul est immédiat car $x^3/3$ est une primitive de x^2 et on a $\int_0^1 t^2 dt = 1/3$. On peut aussi montrer avec cette méthode que l'aire du segment de parabole limité par une corde $[AB]$ (pas nécessairement perpendiculaire à l'axe de la parabole) est égale aux deux tiers de l'aire du triangle limité par $[AB]$ et par les tangentes à la parabole en A et B. Voir sur ce thème [ME] Ch. 7, Th. 2.14, p. 225.

5.4.2 Note historique et pédagogique

Le calcul de la quadrature du segment de parabole remonte à Archimède et c'est un des sommets des mathématiques de l'Antiquité. Archimède donne plusieurs preuves du résultat, voir [ME] p. 249 pour un aperçu d'une de ses preuves dont le ressort algébrique est le calcul de la somme d'une série géométrique. Les programmes de terminale de 2002 suggéraient fortement d'aborder ce problème par la méthode des rectangles. Le principe est le suivant. Si l'on partage le segment $[0,1]$ en n parties égales, voir figure 4, la somme des aires des rectangles situés en-dessous de la courbe est égale à $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{k^2}{n^2}$ et celle des aires situées au-dessus de la courbe est égale à $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^2}$. Pour calculer s_n et S_n il faut se souvenir de la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot$ On obtient alors :

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leq \int_0^1 t^2 dt \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes montre qu'on a $\int_0^1 t^2 dt = 1/3$.

Archimède n'utilise pas cette voie pour la quadrature de la parabole, mais il emploie utilise une méthode très voisine, et notamment la somme des k^2, pour le calcul de l'aire de la spirale dite d'Archimède, voir :
`http://www.math.u-psud.fr/ perrin/Projet-geometrie/Daena-Paloma.pdf`.

Voir aussi sur ma page web :
`http://www.math.u-psud.fr/ perrin/conferences.html`
la conférence sur la quadrature de la parabole pour une discussion plus approfondie.

On notera que cette méthode, qui ramène le calcul à la somme des termes d'une suite, est beaucoup plus compliquée[6] que le calcul des primitives (méthode plus récente puisqu'elle remonte à Newton et Leibniz, vers 1650). Encore, dans le cas de la parabole, parvient-on à faire relativement aisément le calcul de $\sum n^2$, mais on pensera à la difficulté du calcul de $\sum n^{23}$ par rapport à celle de $\int x^{23}dx$ pour mesurer le progrès accompli avec l'invention du calcul infinitésimal.

Toutefois, la méthode des rectangles et d'autres (trapèzes, points médians, etc.) gardent un intérêt pour les calculs approchés d'intégrales dans le cas où l'on ne connaît pas de primitive.

6. D'ailleurs, le programme actuel insiste beaucoup moins sur ce point.

6 Un plan pour un exposé de CAPES

Pour le jour de l'oral, je propose essentiellement de reprendre l'ordre ci-dessus (en gardant en réserve toutes les remarques). Précisément :

1) On définit les primitives et on montre la proposition 1.2 (au moins les points 1 et 2) en insistant sur le fait que I est un intervalle et en donnant la formule $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ qui sera utile plus loin. On évoque les exemples classiques de calculs de primitives par lecture inverse du tableau des dérivées usuelles.

2) On annonce oralement qu'on utilisera librement les propriétés des aires planes (et notamment l'additivité et l'aire du rectangle) sans entrer dans le détail (mais il faut pouvoir répondre à une question sur ce point). On définit l'intégrale d'une fonction continue positive comme l'aire sous la courbe (en indiquant que c'est celle donnée au lycée) et on énonce le théorème 3.2 (l'intégrale donne une primitive dans ce cas). On précise qu'on ne le démontrera que dans le cas monotone. On n'oublie pas la formule donnant l'intégrale comme $G(b) - G(a)$ pour une primitive quelconque.

3) On énonce l'existence d'une primitive pour une fonction continue quelconque (peut-être seulement dans le cas $[a, b]$). On dit oralement qu'on utilisera le fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée inférieurement.

4) On définit l'intégrale d'une fonction continue quelconque (voir 4.1). On dit oralement qu'on pourra en donner une justification géométrique, mais que surtout, la formule est essentielle pour établir les propriétés de l'intégrale et notamment la linéarité et que, là encore, c'est maintenant celle utilisée au lycée.

5) On énonce la proposition 4.4 et la formule de la moyenne.

6) On propose des applications, par exemple les accroissements finis, l'équation fonctionnelle du logarithme et les résultats sur les fonctions périodiques. On peut aussi évoquer la quadrature de la parabole dans la version évidente donnée ci-dessus ou dans celle de [ME]. Dans ce cas, il est bon, en prévision d'une éventuelle question, de savoir aussi faire le calcul avec la méthode des rectangles et d'indiquer pourquoi il est beaucoup moins performant que celui avec les primitives.