Primitives et intégrales

Je donne ici des éléments pour traiter l'exposé de CAPES 76 (liste 2007) : *Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.*

Je trouve cet intitulé un peu curieux. C'est le même depuis une bonne dizaine d'années, alors que les programmes de TS ont évolué sur le sujet. Avant 2002, on y définissait l'intégrale comme différence entre deux valeurs d'une primitive. On préfère maintenant une approche par les aires. Je propose ici une sorte de compromis, inspiré par mon texte [AIP] *Aires, intégrales et primitives*, voir http ://www.math.u-psud.fr/ perrin/conferences.html.

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ (ni vide, ni réduit à un point).

1 Primitives

1.1 Définition. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbf{R}$ (ou une réunion d'intervalles). On dit que la fonction $F : I \to \mathbf{R}$ est une* **primitive** *de f si F est dérivable et si l'on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

1.2 Proposition.
1) Si F est une primitive de f il en est de même de $F + k$ où k est une fonction constante.
2) Si F et G sont deux primitives de f sur un intervalle I, la différence $F-G$ est une constante. Soit $c \in I$ et $k \in \mathbf{R}$. Si f admet une primitive F, il existe une unique primitive G de f qui vérifie $G(c) = k$.

Démonstration. Le point 1) est clair. Pour 2) on a $(F - G)' = 0$, donc $F - G$ est constante.

1.3 *Remarques.*
1) Dans 2), on utilise de manière essentielle le fait que I est un intervalle. Sur une réunion d'intervalles disjoints on peut avoir plusieurs primitives. Par exemple, la fonction nulle sur $]-1,0[\cup]0,1[$ admet comme primitives les fonctions qui valent une certaine constante sur $]-1,0[$ et une autre sur $]0,1[$. Un exemple peut-être plus naturel est celui de la fonction $\sqrt{x^2-1}$ qui est définie sur la réunion des intervalles $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.
2) Une fonction qui admet une primitive est la dérivée d'une fonction, donc elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Il en résulte que la fonction partie entière sur $[0,2]$ n'a pas de primitive.

2 Aires

Nous admettrons l'existence de la notion d'aire et ses propriétés essentielles. Précisément, on admet qu'il existe une application $\mu : \mathcal{Q} \to \mathbf{R}^+$, appelée mesure d'aire, définie sur certaines parties de $\mathbf{R}^2$ dites quarrables et qui vérifie les propriétés suivantes[1] :

1) Les polygones sont quarrables, ainsi que l'hypographe d'une fonction f continue et positive sur un segment (la partie limitée par l'axe des x, le graphe de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, voir figure ci-dessous).

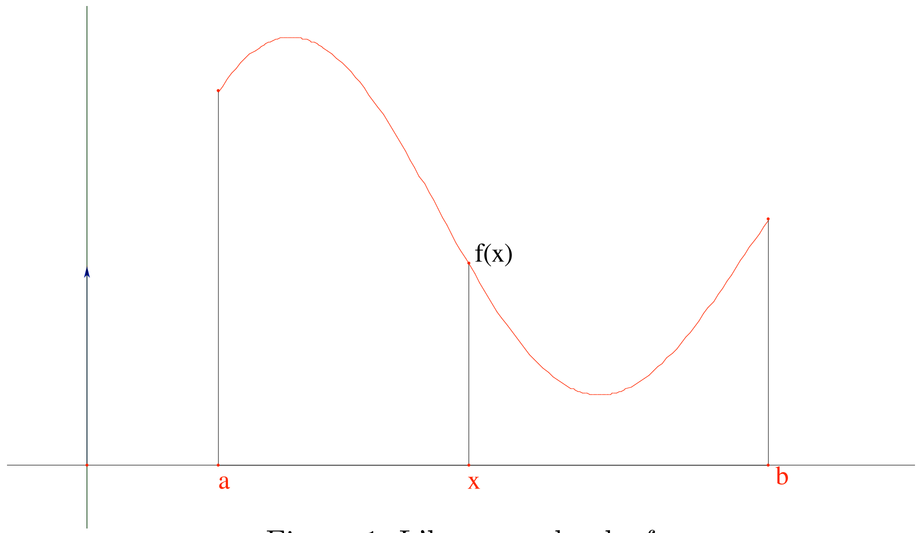

Figure 1: L'hypographe de f

La démonstration de cette dernière propriété repose sur la continuité uniforme de f.

2) La mesure du carré unité bâti sur les axes est égale à 1.

3) La mesure est additive : si A, B sont des parties quarrables disjointes, on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. C'est encore vrai si les parties sont presque disjointes i.e. si leur intersection est une réunion finie de segments. Un corollaire de cette propriété est la croissance de μ : si on a $A \subset B$ on a $\mu(A) \leq \mu(B)$.

4) La mesure est invariante par isométrie : si g est une isométrie on a $\mu(g(A)) = \mu(A)$.

5) Elle est homogène : si h est une homothétie de rapport k on a $\mu(h(A)) = k^2\mu(A)$.

On montre que la mesure d'un rectangle R dont les côtés sont de longueurs a et b est égale à ab. Il faut être conscient que ce résultat, avec lequel

[1] Voir par exemple, sur ce thème, mon livre Mathématiques d'École, Cassini, 2006, cité [ME] dans ce qui suit.

chacun est familier depuis l'école primaire, s'il est trivial lorsque les longueurs sont des multiples entiers de l'unité et facile lorsque ce sont des multiples rationnels, nécessite un passage à la limite pour le cas général, voir [ME] p. 213.

3 Intégrale d'une fonction continue positive

3.1 Définition

3.1 Définition. *Soient $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue ≥ 0. On appelle* **intégrale** *de a à b de f et on note $\int_a^b f(t)dt$ la mesure de l'aire de l'hypographe de f défini ci-dessus.*

C'est la définition du programme actuel de TS.

3.2 Lien avec les primitives

Le théorème essentiel est le suivant. À la différence de ce que suggère le programme de TS, je propose de prouver tout de suite ce théorème et de l'utiliser pour donner la définition de l'intégrale dans le cas général. Voir une argumentation là-dessus dans [AIP].

3.2 Théorème. *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue ≥ 0. La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f. Précisément, c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Si G est une primitive quelconque de f on a $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$.*

Démonstration.

On traite seulement le cas monotone, disons croissant. On calcule le taux d'accroissement $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$, disons pour $h > 0$. La quantité $F(x + h) - F(x)$ est l'aire de l'hypographe entre les abscisses x et $x + h$. Comme cette partie est comprise entre deux rectangles de largeur h et de longueurs $f(x)$ et $f(x + h)$ on a : $hf(x) \leq F(x + h) - F(x) \leq hf(x + h)$, d'où $f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x + h)$. Quand h tend vers 0, comme f est continue, les deux extrêmes tendent vers $f(x)$, donc aussi le taux d'accroissement et on a donc, par définition de la dérivée, $F'(x) = f(x)$.

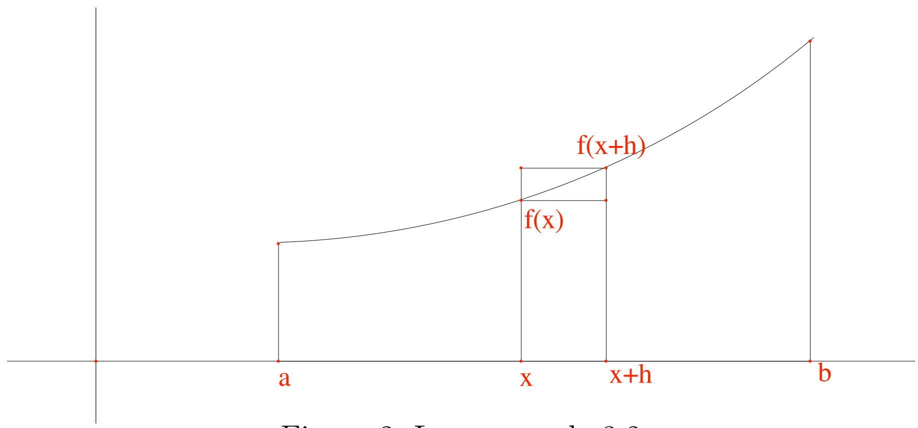

Figure 2: La preuve de 3.2

On a la formule $F(b) = \int_a^b f(t)dt$. Comme $F(a)$ est nulle[2], on a donc encore $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$. Si G est une autre primitive de f, la formule vaut aussi avec G car on a $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante.

3.3 *Remarques.* 1) Il faut être capable de traiter les cas f continue non monotone et $h < 0$ si le jury le demande. Pour $h < 0$ il n'y a pas de difficulté. On a les inégalités :

$$-hf(x+h) \leq F(x) - F(x+h) \leq -hf(x)$$

et l'inégalité est la même qu'auparavant pour le taux d'accroissement. Pour une fonction continue quelconque, il y a deux voies.

• On introduit le minimum m_h et le maximum M_h de f sur $[x, x+h]$, en supposant qu'ils existent, ce qu'un élève de TS admettra sans peine. On a les inégalités :

$$hm_h \leq F(x+h) - F(x) \leq hM_h$$

et la conclusion vient du fait que, comme f est continue en x, m_h et M_h tendent tous deux vers $f(x)$ quand h tend vers 0.

• On utilise directement la continuité de f en ϵ, η (ce qui disqualifie cette preuve au niveau TS). On se donne $\epsilon > 0$ et on doit montrer que, pour $|h| < \eta$, on a $\left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| < \epsilon$. Comme f est continue, il existe η tel que, si t est dans $[x, x+h]$ avec $|h| < \eta$ on a $f(x) - \epsilon < f(t) < f(x) + \epsilon$. L'aire de l'hypographe entre x et $x + h$ est alors comprise entre $h(f(x) - \epsilon)$ et $h(f(x) + \epsilon)$ et on a le résultat.

[2] Il faut savoir justifier le fait qu'un segment est d'aire nulle, par exemple, s'il est de longueur l, en l'englobant dans des rectangles de longueur l et de largeur ϵ et en faisant tendre ϵ vers 0.

2) Il y a des fonctions non continues qui admettent des primitives. Par exemple la fonction définie par $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et par $f(x) = 0$ n'est pas continue en 0 mais admet la primitive F définie par $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $F(0) = 0$.

3.4 Corollaire.
1) Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors, f admet des primitives.
2) La même assertion est encore valable sur un intervalle I quelconque.

Démonstration. 1) On admet[3] que f est minorée par une constante m. On considère $g = f - m$ qui est continue ≥ 0. La fonction g admet une primitive G et f admet la primitive $F(x) = G(x) + mx$.

2) On définit une primitive F de f comme suit. On fixe un point $c \in I$. Soit x un point de I et soient $a, b \in I$ avec $a < b$ tels que $x, c \in [a, b]$. Il existe une unique primitive $G_{a,b}$ de f sur $[a, b]$ qui est nulle en c. On pose $F(x) = G_{a,b}(x)$. Cette définition est indépendante du choix de a et b. En effet, si on a deux autres points a' et b' vérifiant les mêmes conditions, les primitives $G_{a,b}$ et $G_{a',b'}$ coïncident sur $[a, b] \cap [a', b']$ en vertu de 1.2, donc elles sont égales en x. Il est clair que F convient.

4 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

4.1 Définition

Pour une fonction positive, les choses sont claires, l'intégrale c'est l'aire sous la courbe. On a vu en 3.2 que, si F est une primitive de f, on a alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Cette formule est une première justification de la définition suivante, qui vaut pour une fonction de signe quelconque et sans supposer la condition $a < b$ sur les bornes :

4.1 Définition. *Soient $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue, a et b des points de I et soit F une primitive de f sur I. On définit l'intégrale de a à b de f par la formule* $$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

4.2 *Remarque.* Avec la définition ci-dessus, on vérifie que $\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I.

[3] Il faut savoir le prouver si le jury le demande. On peut par exemple le faire par dichotomie.

4.2 Discussion

On peut donner une justification supplémentaire de la définition ci-dessus en voyant l'intégrale comme une aire "orientée".

On considère une fonction continue définie sur sur un intervalle I, de signe constant, mais pas nécessairement ≥ 0, et deux points $a, b \in I$ (on ne suppose pas $a < b$). On considère son hypographe H et le bord orienté ∂H qui est la courbe fermée simple constituée du segment $[a, b]$, mais parcouru de a vers b, puis du segment vertical qui va de $(b, 0)$ à $(b, f(b))$, puis du graphe de f allant jusqu'à $(a, f(a))$ puis du segment vertical qui joint ce point à $(a, 0)$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ sera alors l'aire de l'hypographe, mais comptée positivement (resp. négativement) si ∂H tourne dans le sens trigonométrique (resp. dans le sens des aiguilles d'une montre). En particulier, l'aire sera négative si on a $a < b$ et $f \leq 0$ ou $a > b$ et $f \geq 0$. Examinons ces deux cas et montrons que l'intégrale est encore donnée par la formule $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.

Si on a $a < b$ et f négative, l'aire de l'hypographe, en valeur absolue est la même que celle de l'hypographe de $-f$ en vertu de l'invariance de l'aire par symétrie. Notons α cette aire. Si F est une primitive de f, $-F$ en est une de $-f$ et on a $\alpha = (-F)(b) - (-F)(a)$ en vertu de 3.2. Comme l'intégrale, par convention, doit être négative, c'est bien $-\alpha = F(b) - F(a)$.

Si maintenant on a $a > b$, mais $f \geq 0$, c'est l'intégrale de b à a qui est positive et vaut $F(a) - F(b)$. Comme l'intégrale de a à b correspond à la même aire, comptée négativement, c'est donc encore $F(b) - F(a)$.

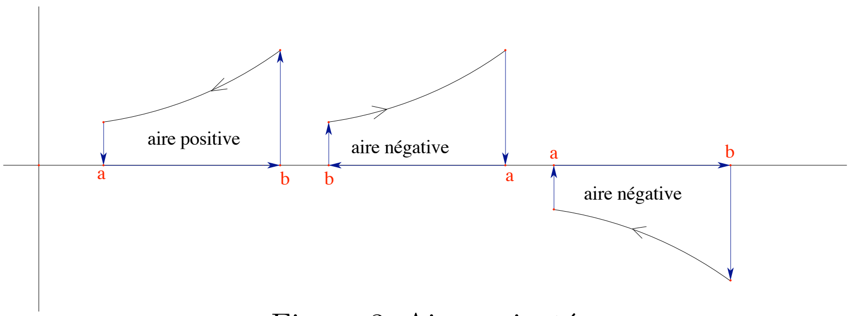

Figure 3: Aires orientées

4.3 Propriétés

4.3 Proposition. *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues et $a, b, c \in I$. On a les propriétés suivantes :*

1) **(Relation de Chasles)** *On a* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt =$

$-\int_b^a f(t)dt$, $\int_a^a f(t)dt = 0$.

2) **(Linéarité)** *Pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ *on a* $\int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$.

3) **(Positivité)** *On suppose* $a \leq b$. *Si* $f(t)$ *est* ≥ 0 *pour tout* $t \in [a, b]$, $\int_a^b f(t)dt$ *est* ≥ 0. *Si on a* $f \leq g$, *on a* $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Démonstration. Avec la définition 4.1 les preuves sont très faciles. En revanche, avec la définition 3.1 ce n'est pas le cas, même en se limitant aux fonctions positives. Le lecteur réfléchira par exemple à la formule $\int (f+g) = \int f + \int g$.

Montrons Chasles. Si F est une primitive de f, il s'agit de prouver les formules : $F(b)-F(a) = F(c)-F(a)+F(b)-F(c)$, $F(a)-F(b) = -(F(b)-F(a))$ et $F(a)-F(a) = 0$. On devrait y arriver.

Pour la linéarité, on note que $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ et il s'agit de vérifier alors $(\lambda F + \mu G)(b) - (\lambda F + \mu G)(a) = \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a))$. Là non plus il n'y a pas de difficulté.

Enfin, la positivité est évidente avec la définition 3.1.

4.4 *Remarques.*
1) Pour la positivité, attention à la condition $a \leq b$. Une question piège est la suivante : soit x un réel positif. Quel est le signe de $\int_x^{x^2} \ln x\, dx$?
2) On peut aussi énoncer des résultats concernant la parité, les périodes, etc.

5 Applications

5.1 Formule de la moyenne

Il s'agit de l'énoncé suivant :

5.1 Proposition. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *une fonction continue. Il existe un point* $c \in [a, b]$ *qui vérifie :*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

La valeur $f(c)$ *est appelée* **valeur moyenne** *de* f *sur* $[a, b]$.

Démonstration. Soient m et M les bornes de f. On admet qu'elles existent et sont atteintes. Alors, l'intégrale I est comprise entre $m(b-a)$ et $M(b-a)$. Il en résulte que $\frac{I}{b-a}$ est compris entre m et M. Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{I}{b-a}\cdot$

5.2 L'inégalité des accroissements finis

5.2 Proposition. *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe m et M tels que l'on ait $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors, on a* **l'inégalité des accroissements finis** *:*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$ et d'appliquer la positivité de l'intégrale.

5.3 Définition de nouvelles fonctions

Notamment des fonctions réciproques : logarithme, Arcsinus, Arctangente, etc.

5.4 La quadrature de la parabole

On considère la parabole d'équation $y = x^2$ et on cherche à calculer, par exemple, l'aire de la partie située au-dessus de la courbe et en dessous de la droite d'équation $y = 1$, ou, ce qui revient au même, l'aire de la partie limitée par l'axe des x, les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$ et la courbe. Par symétrie, cette aire est double de celle de sa moitié droite E, définie par $x \geq 0$. Pour la calculer, deux méthodes.

• On encadre E par des rectangles, voir figure ci-dessus. Si l'on partage le segment $[0,1]$ en n parties égales, la somme des aires des rectangles situés en-dessous de la courbe est égale à $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{k^2}{n^2}$ et celle des aires situées au-dessus de la courbe est égale à $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^2}$. Pour faire ce calcul, il faut se souvenir de la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot$ On obtient alors :

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leq \int_0^1 t^2 dt \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\cdot$$

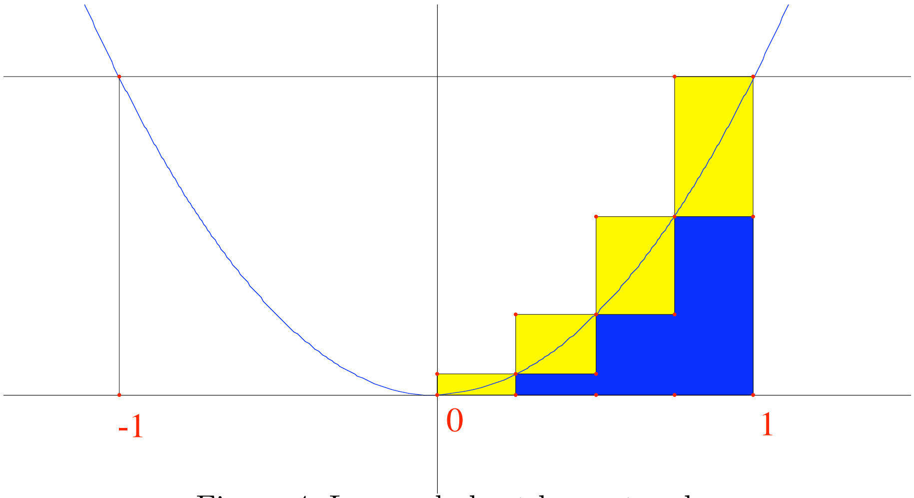

Figure 4: La parabole et les rectangles

Lorsque n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes montre qu'on a $\int_0^1 t^2 dt = 1/3$.

- On remarque que $x^3/3$ est une primitive de x^2 et on a le résultat.

5.3 *Remarque.* La première méthode ne doit être proposée à des élèves que comme repoussoir, pour montrer combien la méthode utilisant les primitives est plus simple. La procédure de découpage, qui remonte à Archimède[4] et qui ramène le calcul à la somme des termes d'une suite, est beaucoup plus compliquée que le calcul des primitives (méthode plus récente puisqu'elle remonte à Newton et Leibniz, vers 1650). Encore, dans le cas de la parabole, parvient-on à faire relativement aisément le calcul de $\sum n^2$, mais on pensera à la difficulté du calcul de $\sum n^{23}$ par rapport à celle de $\int x^{23}dx$ pour mesurer le progrès accompli avec l'invention du calcul infinitésimal.

[4] Attention, Archimède calcule effectivement l'aire d'un segment de parabole par une méthode de découpage et passage à la limite, mais pas du tout en encadrant par des rectangles comme ci-dessus. Voir [ME] p. 249 pour un aperçu de ce que fait Archimède et dont le ressort algébrique n'est pas le calcul de la somme des carrés des premiers entiers mais celui de la somme d'une série géométrique. En revanche, Archimède utilise une méthode très voisine de celle évoquée ici, et notamment la somme des k^2, pour le calcul de l'aire de la spirale dite d'Archimède, voir [AIP].