

Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Daniel PERRIN

1 Position du problème

1.1 L'équation avec second membre

1.1 Définition. Soit g une fonction continue définie sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point) de \mathbf{R} et à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} . On considère l'équation différentielle $(*) : ay'' + by' + cy = g$ (avec $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $a \neq 0$). Résoudre¹ cette équation c'est chercher les fonctions $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ ou $f : I \rightarrow \mathbf{C}$, deux fois dérivables, telles que l'on ait, pour tout $x \in I$, $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x)$.

1.2 L'équation homogène, ou sans second membre

1.2 Définition. Avec les notations précédentes, l'équation homogène associée à $(*)$ est l'équation $(**) : ay'' + by' + cy = 0$.

1.3 Remarques.

- 1) Si f est solution de $(**)$, f est C^∞ . En effet, comme a est non nul, f'' est combinaison linéaire de f et f' , donc dérivable, donc f est trois fois dérivable et on a $af''' + bf'' + cf' = 0$ en dérivant l'équation. Une récurrence immédiate achève le travail.
- 2) Si l'on sait ce qu'est un espace vectoriel, on voit que l'ensemble des solutions est un \mathbf{R} -espace vectoriel (voire un \mathbf{C} -espace vectoriel).

1.4 Proposition. Soit f une solution de $(*)$. Toute solution de cette équation est de la forme $f + h$ où h est une solution de $(**)$.

Démonstration. Si k est une autre solution de $(*)$, on vérifie aussitôt que $k - f := h$ est solution de $(**)$.

¹On dit aussi intégrer.

1.5 Remarque. On paraphrase souvent ce résultat en disant que la solution générale de l'équation (*) est somme d'une solution particulière de (*) et de la solution générale de l'équation homogène. En termes savants, l'ensemble des solutions de (*) est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des solutions de (**).

2 Rappels sur l'équation du premier ordre

Rappelons le résultat :

2.1 Théorème. *Les solutions de l'équation différentielle $y' = \alpha y$, $\alpha \in \mathbf{R}$, sont les fonctions $f(x) = \lambda e^{\alpha x}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$.*

Démonstration. Avec les nouveaux programmes de terminale c'est presque évident, voir mon papier. Rappelons comment on trouve cela avec les anciens.

On écrit, si y n'est pas nul, $\frac{y'}{y} = \alpha$. On reconnaît une dérivée logarithmique, de sorte qu'en prenant une primitive on a $\ln|y| = \alpha x + c$ et on voit donc en tous cas, apparaître des solutions de la forme $\lambda e^{\alpha x}$. Bien entendu, ce calcul a le défaut de nécessiter le fait que y n'est pas nul. Mais maintenant qu'il nous a donné une solution on peut l'oublier et utiliser la méthode classique de variation de la constante : on cherche les solutions sous la forme $f(x) = g(x)e^{\alpha x}$ ou encore, on pose $g(x) = f(x)e^{-\alpha x}$. En dérivant on voit que g' est nulle et on a gagné.

3 Des solutions de l'équation (**)

Fort de ce qui se passe au premier ordre on cherche des solutions de l'équation de la forme e^{rx} . Un calcul immédiat montre qu'une telle fonction est solution si et seulement si r est racine de **l'équation caractéristique** $ar^2 + br + c = 0$. Bien entendu, il y a trois cas *a priori* selon que cette équation admet deux racines réelles r_1, r_2 distinctes, une racine double r ou deux racines complexes conjuguées.

Dans le premier cas, on a deux belles solutions réelles $f_1(x) = e^{r_1 x}$ et $f_2(x) = e^{r_2 x}$ et on est content.

Dans le second on a seulement la solution $f_1(x) = e^{rx}$ où r est la racine double. On en voudrait une autre² et le plus naturel est de la chercher avec

²Voir plus bas pourquoi on pense qu'il y a deux solutions.

la méthode de variation de la constante, donc de chercher une solution de la forme $y(x) = e^{rx}z(x)$. En écrivant que y est solution de (**), on trouve³ :

$$(ar^2 + br + c)z(x)e^{rx} + (2ar + b)z'(x)e^{rx} + az''(x)e^{rx} = 0.$$

Comme r est racine double de l'équation caractéristique, les deux premiers termes sont nuls et il ne reste que $z''(x) = 0$ qui donne $z(x) = ux + v$ et on tient notre deuxième solution : $f_2(x) = xe^{rx}$.

Dans le dernier cas, on a des solutions complexes de la forme $\alpha \pm i\omega$ avec $\omega \neq 0$ qui conduisent aux fonctions $e^{\alpha x}e^{\pm i\omega x}$. Avec les formules d'Euler on obtient des fonctions réelles, combinaison linéaires des précédentes, $f_1(x) = e^{\alpha x} \cos \omega x$ et $f_2(x) = e^{\alpha x} \sin \omega x$. Si l'on est convaincu que ces fonctions sont solutions comme combinaison linéaire des solutions complexes, tant mieux. Si l'on est sceptique on peut le vérifier directement. Le calcul n'est pas difficile. Par exemple pour f_1 on obtient :

$$af_1''(x) + bf_1'(x) + cf_1(x) = (a(\alpha^2 - \omega^2) + b\alpha + c) \cos \omega x - (2a\alpha + b)\omega \sin \omega x$$

et il faut voir que cette quantité est nulle. Mais ses coefficients sont les parties réelle et imaginaire de $a(\alpha + i\omega)^2 + b(\alpha + i\omega) + c$ qui est nul par hypothèse.

4 Toutes les solutions de (**)

4.1 Introduction

Quand on a, ne serait-ce qu'un embryon de sens physique⁴, on sait qu'un phénomène régi par une équation du second ordre dépend de deux paramètres : la position initiale $y(0)$ et la vitesse initiale $y'(0)$. On pense donc que les solutions de l'équation (**) vont dépendre de deux paramètres. Comme on a trouvé, dans chaque cas, deux solutions f_1, f_2 , on conjecture que toutes les solutions sont les combinaison linéaires de celles-là. En tout cas, si on se donne des conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$, on va pouvoir trouver une solution de l'équation de la forme $y(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ en résolvant le système suivant en λ_1, λ_2 : $\lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0) = y(0)$ et $\lambda_1 f_1'(0) + \lambda_2 f_2'(0) = y'(0)$. On trouve une solution unique si le système est de Cramer c'est-à-dire si le déterminant $\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) \end{vmatrix}$ est non nul.

En fait, comme il n'y a aucune raison que la valeur initiale soit prise au temps $x = 0$, cela mérite d'examiner, plus généralement, ce qu'on appelle le

³Et ce calcul peut être utilisé de bien d'autres façons.

⁴Ou qu'on a entendu parler du théorème de Cauchy.

wronskien des solutions f_1, f_2 , c'est-à-dire le déterminant :

$$w(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}.$$

On a alors le lemme suivant :

4.1 Lemme. *Dans les trois cas examinés au §3 ci-dessus, le wronskien des solutions f_1, f_2 est toujours non nul.*

Démonstration. Un petit calcul donne $w(x) = (r_1 - r_2)e^{r_1x}e^{r_2x}$ dans le premier cas, $w(x) = e^{2rx}$ dans le second et $w(x) = \omega e^{2\alpha x}$ dans le troisième. Dans tous les cas il est non nul.

4.2 Le théorème

4.2 Théorème. *On appelle $f_1(x)$ et $f_2(x)$ les solutions de (**) trouvées au §3. Alors, toutes les solutions de l'équation sont les combinaisons linéaires de f_1 et f_2 à coefficients réels. Elles sont donc définies sur \mathbf{R} tout entier.*

Démonstration. Soit y une solution de l'équation. Si on croit au résultat on doit avoir $y(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ et $y'(x) = \lambda_1 f_1'(x) + \lambda_2 f_2'(x)$. En tous cas, pour un x fixé, on peut trouver des réels $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ qui vérifient $y(x) = \lambda_1(x) f_1(x) + \lambda_2(x) f_2(x)$ et $y'(x) = \lambda_1(x) f_1'(x) + \lambda_2(x) f_2'(x)$: c'est le fait que le déterminant de ce système, qui n'est autre que $w(x)$, ne s'annule pas. On a donc trouvé, non pas des constantes, mais des fonctions λ_i qui font le travail. Il reste à prouver que ces fonctions sont, en fait, des constantes. D'abord, la résolution du système montre que les λ_i sont dérivables (il suffit de noter qu'en numérateur figurent y et les f_i et qu'en dénominateur c'est la fonction non nulle w qui apparaît), de sorte qu'il suffit de montrer que leurs dérivées sont nulles. Si on dérive le système, on trouve d'abord :

$$y'(x) = \lambda_1(x) f_1'(x) + \lambda_2(x) f_2'(x) + \lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x)$$

qui donne, avec l'une des équations précédentes, $\lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) = 0$. Si l'on dérive une fois de plus on a :

$$y''(x) = \lambda_1(x) f_1''(x) + \lambda_2(x) f_2''(x) + \lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x)$$

mais, avec l'équation $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ et le fait que f_1 et f_2 sont des solutions, les termes en $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ s'en vont et il ne reste que $\lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x) = 0$. On se retrouve donc avec les deux équations :

$$\lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2'(x) f_2'(x) = 0.$$

Comme le déterminant de ce système est encore $w(x)$, il est non nul et on en déduit $\lambda_1'(x) = \lambda_2'(x) = 0$ pour tout x : cqfd.

5 Trouver une solution particulière de (*) ?

Maintenant que nous avons déterminé toutes les solutions de l'équation homogène, il reste à trouver **une** solution de (*). Il y a essentiellement deux voies.

5.1 Le cas des solutions apparentes

Dans nombre de cas, on peut imaginer d'avance la forme d'une solution de l'équation à partir de la forme du second membre :

5.1 Proposition.

1) On suppose que la fonction g est de la forme $g(x) = P(x)e^{rx}$ où P est un polynôme de degré n et r un réel ou un complexe. Alors, il y a une solution de l'équation (*) de la forme $Q(x)e^{rx}$ où Q est un polynôme de degré n si r n'est pas racine de l'équation caractéristique, de degré $n+1$ si r en est racine simple, de degré $n+2$ si r en est racine double.

2) On suppose g de la forme $g(x) = e^{rx}(\alpha \cos sx + \beta \sin sx)$ avec r, s, α, β réels et $s \neq 0$. Alors, il y a une solution de l'équation (*) de la forme $e^{rx}(A \cos sx + B \sin sx)$ (resp. $xe^{rx}(A \cos sx + B \sin sx)$) si $r + is$ n'est pas racine de l'équation caractéristique (resp. en est racine).

Démonstration. On a à résoudre en Q l'équation $aQ'' + (2ar + b)Q' + (ar^2 + br + c)Q = P$. Supposons par exemple que r n'est pas racine de l'équation caractéristique. On considère l'application linéaire φ de l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]_n$ des polynômes de degré $\leq n$ dans lui-même qui à Q associe $aQ'' + (2ar + b)Q' + (ar^2 + br + c)Q$ et il s'agit de voir qu'elle est surjective. Il suffit pour cela de montrer qu'elle est injective, donc que son noyau est nul, ce qui est immédiat en examinant le terme de plus haut degré de Q . Si r est racine mais pas racine double on considère $\psi : \mathbf{R}[X]_{n+1} \rightarrow \mathbf{R}[X]_n$ donnée par $\psi(Q) = aQ'' + (2ar + b)Q'$ et on montre, comme ci-dessus, que son noyau est réduit aux constantes, donc qu'elle est surjective. Le dernier cas est trivial.

Le point 2) est un cas particulier du point 1).

5.2 La méthode de variation des constantes

Supposons que l'équation caractéristique admette deux racines distinctes r_1 et r_2 . Comme dans la preuve de 4.2, on cherche les solutions de (*) sous la forme $f(x) = \lambda_1(x)e^{r_1x} + \lambda_2(x)e^{r_2x}$. On dérive :

$$f'(x) = \lambda_1'(x)e^{r_1x} + \lambda_2'(x)e^{r_2x} + r_1\lambda_1(x)e^{r_1x} + r_2\lambda_2(x)e^{r_2x}$$

et il est astucieux d'imposer $\lambda_1'(x)e^{r_1x} + \lambda_2'(x)e^{r_2x} = 0$, histoire de simplifier l'expression. On en déduit

$$f''(x) = r_1\lambda_1'(x)e^{r_1x} + r_2\lambda_2'(x)e^{r_2x} + r_1^2\lambda_1(x)e^{r_1x} + r_2^2\lambda_2(x)e^{r_2x}.$$

En écrivant que f est solution de (*), il reste, compte-tenu du fait que r_1 et r_2 annulent $ar^2 + br + c$, les deux relations suivantes (on n'oublie pas celle imposée ci-dessus) :

$$r_1\lambda_1'(x)e^{r_1x} + r_2\lambda_2'(x)e^{r_2x} = \frac{g(x)}{a} \quad \text{et} \quad \lambda_1'(x)e^{r_1x} + \lambda_2'(x)e^{r_2x} = 0.$$

On résout alors le système linéaire ci-dessus en $\lambda_1'(x)$ et $\lambda_2'(x)$ et on obtient :

$$\lambda_1'(x) = \frac{g(x)}{a(r_1 - r_2)} e^{-r_1x} \quad \lambda_2'(x) = \frac{g(x)}{a(r_2 - r_1)} e^{-r_2x}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver des primitives de ces fonctions pour avoir les solutions cherchées (on dit qu'on a ramené la résolution de l'équation à des "quadratures"). En tous cas, comme les fonctions ci-dessus sont continues, elles admettent des primitives et on a montré :

5.2 Théorème. *L'équation (*) admet une solution $f_0(x)$. Toutes ses solutions, avec les notations de 4.2 sont les fonctions $f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.*

5.3 Corollaire. (Solution du problème de Cauchy) *Soient x_0, y_0, y_0' trois réels. Il existe une unique solution f de (*) qui vérifie $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$.*

Démonstration. On cherche f sous la forme $f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. On a alors à résoudre le système en λ_1, λ_2 :

$$\lambda_1 f_1(x_0) + \lambda_2 f_2(x_0) = y_0 - f_0(x_0) \quad \text{et} \quad \lambda_1 f_1'(x_0) + \lambda_2 f_2'(x_0) = y_0' - f_0'(x_0)$$

et on conclut car $w(x_0)$ est non nul.