CALCUL APPROCHÉ D'INTÉGRALES

Daniel PERRIN

0. Introduction.

L'objectif de ces notes est de proposer une démonstration des majorations de l'erreur pour les quatre méthodes usuelles de calcul approché d'intégrales (rectangles, trapèzes, point médian, Simpson, en abrégé R, T, M, S). L'intérêt de la méthode proposée est double :
1) c'est la même méthode pour les quatre cas et elle est très naturelle,
2) cette méthode est du niveau d'un élève de terminale (elle n'utilise ni le théorème des accroissements finis, ni la formule de Taylor).

1. Les quatre méthodes R,T,M,S.

a) Cadre général.

On cherche à calculer une intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ où f est une fonction continue (voire C^1, C^2, C^4) sur $[a,b]$, avec $a < b$. On remplace f par une fonction g sur $[a,b]$ (constante, affine, polynomiale de degré 2). Précisément, on approche I par l'une des expressions suivantes :

$$I_R = (b-a)f(a) \text{ ou } I_R = (b-a)f(b) \ ; \qquad I_T = (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right],$$

$$I_M = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \ ; \qquad I_S = \frac{b-a}{6}\big[f(a)+f(b)+4f(\frac{a+b}{2})\big].$$

On peut ensuite itérer la méthode en l'appliquant sur chacun des intervalles d'une subdivision régulière de $[a,b]$: $x_0 = a$, $x_1 = a + \dfrac{b-a}{n}$, ..., $x_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}$, ..., $x_n = b$. Par exemple, pour la méthode des rectangles et des trapèzes on obtient

$$I_{R,n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \ ; \qquad I_{T,n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\right].$$

On définit de même $I_{M,n}$ et $I_{S,n}$.

b) Les majorations.

Si f est de classe C^k on pose

$$M_k = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)|.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.
1) (Rectangles) On suppose f de classe C^1. On a $|I-I_R| \leq \dfrac{(b-a)^2}{2}M_1$.
2) (Trapèzes) On suppose f de classe C^2. On a $|I-I_T| \leq \dfrac{(b-a)^3}{12}M_2$.
3) (Point médian) On suppose f de classe C^2. On a $|I-I_M| \leq \dfrac{(b-a)^3}{24}M_2$.
4) (Simpson) On suppose f de classe C^4. On a $|I-I_S| \leq \dfrac{(b-a)^5}{2880}M_4$.

On déduit de ce théorème les majorations dans le cas d'une subdivision à n pas :

Corollaire 2.
1) (Rectangles) On suppose f de classe C^1. On a $|I-I_{R,n}| \leq \dfrac{(b-a)^2}{2n}M_1$.
2) (Trapèzes) On suppose f de classe C^2. On a $|I-I_{T,n}| \leq \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$.
3) (Point médian) On suppose f de classe C^2. On a $|I-I_{M,n}| \leq \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}M_2$.
4) (Simpson) On suppose f de classe C^4. On a $|I-I_{S,n}| \leq \dfrac{(b-a)^5}{2880n^4}M_4$.

Démonstration. (du corollaire) Faisons par exemple le cas du trapèze, les autres sont identiques. En vertu du théorème 1, appliqué à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, de longueur $\dfrac{b-a}{n}$, on a l'inégalité :

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\right] \right| \leq \left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \frac{M_2}{12},$$

En sommant ces n inégalités on obtient le résultat (il y a un n du dénominateur qui s'en va).

c) Preuve du théorème 1, cas R et T.

Expliquons l'idée sur le cas du rectangle. On cherche à majorer l'erreur $\Delta = \displaystyle\int_a^b f(t)dt - (b-a)f(a)$. Cette quantité est une constante, mais si on fait varier b elle devient une fonction : $\Delta(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt - (x-a)f(a)$. Bien sûr, il suffit de majorer $\Delta(x)$ (car on aura la majoration de Δ en faisant $x = b$). Pour cela on dérive jusqu'à ce qu'on voie une majoration évidente. Ici, le premier pas suffit, on a $\Delta'(x) = f(x) - f(a)$ et on applique l'inégalité des accroissements finis[1] (IAF) qui donne $|\Delta'(x)| \leq M_1(x-a)$. On majore alors Δ en intégrant Δ' : $\Delta(x) = \displaystyle\int_a^x \Delta'(t)dt$ (car $\Delta(a) = 0$), d'où, $|\Delta(x)| \leq M_1 \displaystyle\int_a^x (t-a)dt = M_1\frac{(x-a)^2}{2}$ et on a le résultat.

Pour la méthode des trapèzes on considère $\Delta(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt - (x-a)\frac{f(x)+f(a)}{2}$

[1] En principe, cette inégalité n'est plus au programme de terminale S depuis 2002. On peut contourner cette difficulté en éccrivant $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$ et en appliquant l'inégalité de la moyenne.

et on a : $\Delta'(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(a) - (x-a)f'(x))$, puis $\Delta''(x) = -\dfrac{(x-a)}{2}f''(x)$. On en déduit $|\Delta''(x)| \leq \frac{1}{2}M_2(x-a)$ et, en intégrant (en tenant compte de $\Delta'(a) = \Delta(a) = 0$), $|\Delta'(x)| \leq \dfrac{(x-a)^2}{4}M_2$ et $|\Delta(x)| \leq \dfrac{(x-a)^3}{12}M_2$ d'où le résultat en prenant $x = b$.

d) Preuve du théorème 1, cas M et S.

L'idée est identique, avec une variante qui consiste à choisir comme origine le point médian $c = \dfrac{a+b}{2}\cdot$ On regarde alors, dans le cas du point médian : $\Delta(x) = \displaystyle\int_{c-x}^{c+x} f(t)dt - 2xf(c)$ (car la largeur de l'intervalle est ici $2x$; on aura la majoration voulue en prenant $x = \frac{b-a}{2}$). On dérive : $\Delta'(x) = f(c+x) + f(c-x) - 2f(c)$, puis $\Delta''(x) = f'(c+x) - f'(c-x)$ que l'on majore par IAF : $|\Delta''(x)| \leq 2xM_2$, d'où en intégrant deux fois sur $[0,x]$ et en tenant compte de $\Delta'(0) = \Delta(0) = 0$, les majorations : $|\Delta'(x)| \leq x^2M_2$, puis $|\Delta(x)| \leq \dfrac{x^3}{3}M_2$. Si on applique cette formule avec $x = \frac{b-a}{2}$ on obtient $|I - I_M| \leq M_2\dfrac{(b-a)^3}{3\times 8}$, d'où le résultat.

Finissons avec Simpson. Cette fois on considère

$$\Delta(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)dt - \frac{x}{3}[f(c+x) + f(c-x) + 4f(c)].$$

On doit dériver trois fois pour voir une majoration évidente :

$$\Delta'(x) = \frac{2}{3}[f(c+x) + f(c-x)] - \frac{4}{3}f(c) - \frac{x}{3}[f'(c+x) - f'(c-x)],$$

$$\Delta''(x) = \frac{1}{3}[f'(c+x) - f'(c-x)] - \frac{x}{3}[f''(c-x) + f''(c+x)],$$

$$\Delta'''(x) = \frac{x}{3}[f'''(c-x) - f'''(c+x)]$$

que l'on majore par IAF : $|\Delta'''(x)| \leq \dfrac{2x^2}{3}M_4$. On en déduit successivement, en intégrant sur $[0,x]$ et en tenant compte de $\Delta''(0) = \Delta'(0) = \Delta(0) = 0$, les majorations :

$$|\Delta''(x)| \leq \frac{2x^3}{9}M_4, \quad |\Delta'(x)| \leq \frac{x^4}{18}M_4, \quad |\Delta(x)| \leq \frac{x^5}{90}M_4.$$

En faisant $x = \frac{b-a}{2}$ on obtient $|I - I_S| \leq \dfrac{(b-a)^5}{90\times 32}M_4 = \dfrac{(b-a)^5}{2880}M_4$ comme annoncé.