1 Limite de la dérivée, limite de la fonction

Le but de ces quelques lignes est de prouver le résultat suivant :

1.1 Théorème. *Soit f une fonction à valeurs réelles, dérivable sur un intervalle $]a, b[$. On suppose que $f'(x)$ admet une limite finie quand x tend vers a (ou même seulement que f' est bornée sur un intervalle $]a, a+\epsilon[$, avec $\epsilon > 0$). Alors, $f(x)$ a une limite finie quand x tend vers a.*

1.1 Une condition de Cauchy

1.2 Lemme. *Soit $I =]a, b[$ un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. On suppose que f vérifie la condition de Cauchy suivante :*

$$(*) \qquad \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad \forall x, y \in I, \quad |x-a| < \eta \text{ et } |y-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Alors, f admet une limite finie quand x tend vers a.

Démonstration. On choisit une suite (x_n) de points de I qui converge vers a. La condition $(*)$ ci-dessus montre que $(f(x_n))$ est de Cauchy, donc converge vers une limite l. Alors, l est la limite de f. En effet, si on se donne $\epsilon > 0$, la condition $(*)$ fournit un η et, comme (x_n) converge vers a, on a $|x_n - a| < \eta$ pour n assez grand. Si x vérifie $|x - a| < \eta$, on a, en vertu de $(*)$, $|f(x) - f(x_n)| \leq \epsilon$ d'où, en passant à la limite sur n, $|f(x) - l| \leq \epsilon$ et la conclusion s'ensuit.

1.3 *Remarque.* La condition $(*)$ est vérifiée, en particulier, si f est lipschitzienne de rapport M (prendre $\eta = \epsilon/2M$).

1.2 Preuve du théorème 1.1

Quitte à restreindre I on peut supposer f' bornée : il existe M tel que $|f'(t)| \leq M$ pour tout $x \in I$. Il suffit de montrer que f vérifie la condition de Cauchy $(*)$. Mais, en vertu de l'inégalité des accroissements finis, on a $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ et f est M-lipschitzienne, d'où la conclusion[1] par 1.3.

1.4 *Remarques.*
1) Le lemme 1.2 vaut dans un cadre beaucoup plus général.
2) Dans l'énoncé du théorème 1 on peut remplacer la condition f' bornée par le fait que le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ soit borné (c'est une autre façon de dire que f est lipschitzienne).

---

1. Si f' est intégrable au sens de Lebesgue, on peut aussi écrire $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt$ et utiliser l'inégalité de la moyenne.