Intervalles et homéomorphismes

1. Les types d'intervalles.

On appelle ici intervalle une partie connexe de $\mathbf{R}$ non vide et non réduite à un point. Cela signifie que les intervalles sont de l'une des formes suivantes :

$\mathbf{R}$, $]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$, $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, avec $a < b$.

On dit que deux intervalles I et J sont **de même type** s'ils sont homéomorphes, c'est-à-dire (par définition) s'il existe deux applications continues $f : I \to J$ et $g : J \to I$, réciproques l'une de l'autre. La relation d'homéomorphie est une relation d'équivalence sur les intervalles. Dans le cas des intervalles, on montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que I et J soient homéomorphes c'est qu'il existe $f : I \to J$ continue et bijective (il n'est pas tout à fait évident qu'alors f^{-1} soit continue, il faut pour cela montrer que f est strictement monotone, donc aussi f^{-1}). Nous n'aurons pas besoin de ce résultat.

Proposition 1. *Il y a trois classes d'équivalence d'intervalles pour la relation d'homéomorphie (on parlera d'intervalles de types 1,2 ou 3) :*
1) tous les intervalles compacts $[a, b]$,
2) tous les intervalles semi-ouverts de la forme $]-\infty, a]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, +\infty[$,
3) tous les intervalles ouverts de la forme $\mathbf{R}$, $]-\infty, a[$, $]a, b[$, $]a, +\infty[$.

Démonstration. Il y a deux choses à prouver :
1) que les intervalles d'une même classe sont bien homéomorphes,
2) que deux intervalles de classes différentes ne le sont pas.

Pour le point 1) on exhibe des fonctions qui font le travail : par exemple $f(x) = a + (b-a)x$ permet de montrer que les intervalles $[0, 1]$ et $[a, b]$ sont homéomorphes, y compris pour les intervalles ouverts, ou semi-ouverts du même côté. Pour passer de $[0, 1[$ à $]0,1]$ on utilise $f(x) = 1 - x$. Cela règle le cas de tous les intervalles bornés. On passe d'un intervalle avec une borne infinie à un autre de même type par une translation suivie éventuellement de l'application $x \mapsto -x$. Enfin, on passe de $\mathbf{R}$ à $]0, 1[$ grâce à $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ (par exemple) et de $\mathbf{R}$ à $]0, +\infty[$ par l'exponentielle.

Pour le point 2) on utilise au contraire des arguments topologiques intrinsèques. Attention, les notions d'ouvert et de fermé, qui sont des notions relatives (on est ouvert **dans** quelque chose) ne suffisent pas (exemple : $\mathbf{R}$ est fermé dans $\mathbf{R}$ et pourtant homéomorphe à $]a, b[$ qui est ouvert).

Les deux théorèmes pertinents ici sont les suivants : l'image d'un compact (resp. d'un connexe) par une application continue est un compact (resp. un connexe).

L'argument de compacité permet de distinguer les intervalles compacts $[a, b]$ des autres. Pour distinguer les intervalles de types $[a, b[$ et $]c, d[$ on raisonne ainsi. Si on a $f : I = [a, b[\to J =]c, d[$ continue et bijective on regarde $I - \{a\}$. Il est connexe, donc aussi son image. Or, si $f(a) = e$ (avec $c < e < d$), on a $f(I - \{a\}) =]c, e[\cup]e, d[$ qui est non connexe et c'est absurde.

2. Une question.

La question est :
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ continue et $J = f(I)$. Les intervalles I et J sont-ils de même nature ?
La réponse est **non**, ou, en tous cas, pas toujours. Précisément :

Proposition 2.
1) L'image d'un intervalle de type 1) est un intervalle de type 1).
2) L'image d'un intervalle de type 2) est un intervalle de type 1) ou 2) (et les deux cas sont possibles).
3) L'image d'un intervalle de type 3) est un intervalle de type 1), 2) ou 3) (et les trois cas sont possibles).

Démonstration. Les points 1) et 2) ont été vus ci-dessus. Il reste à montrer que les divers cas sont possibles.
• Si on prend $f(x) = x(x-1)$ on a $f([0,1[) = [0,1/4]$.
• Si on prend $f(x) = \sin x$ on a $f(]0,\pi[) =]0,1]$.
• Si on prend $f(x) = \sin x$ on a $f(]0,2\pi[) = [-1,1]$.