FONCTIONS PLATES

On donne ici une méthode pour fabriquer des fonctions qui se raccordent de manière C^∞ à des fonctions constantes. Ce type de fonction est très utile pour transformer des exemples pas ou peu dérivables en des exemples de classe C^∞.

1 Une fonction plate en 0

1.1 Théorème. *La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$ est C^∞. Toutes ses dérivées sont nulles en 0. (On dit que f est une fonction* **plate** *en 0.)*

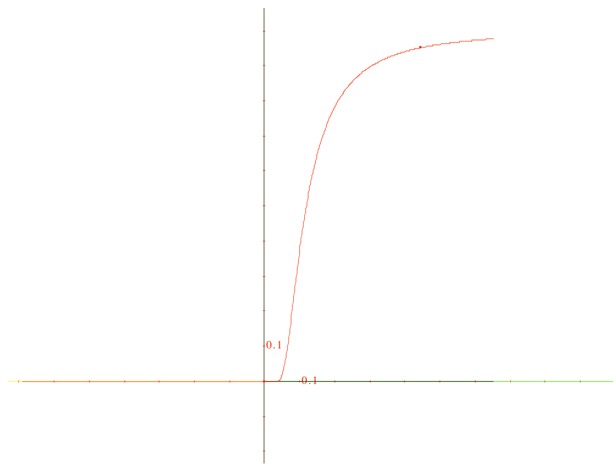

Figure 1: La fonction f

Démonstration. Il est clair que f est C^∞ pour $x < 0$ ou $x > 0$, clair aussi que f est continue en 0 car $e^{-\frac{1}{x}}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Pour le reste, on s'appuie sur le lemme suivant :

1.2 Lemme. *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue, dérivable sur $[a, b]$ sauf peut-être en x_0 avec $a < x_0 < b$. On suppose que $f'(x)$ a une limite l quand x tend vers x_0. Alors f est dérivable en x_0 et on a $f'(x_0) = l$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis au taux d'accroissement : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$ avec $\xi \in]x_0, x[$.

Revenons au théorème. On montre par récurrence sur n que $f^{(n)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. On utilise un autre lemme :

1.3 Lemme. *Pour $n \geq 0$ et $x > 0$ on a la formule :*

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{P_n(x)}{x^{2n}}$$

où P_n est un polynôme non nul en 0.

Démonstration. On procède par récurrence sur n. C'est clair pour $n = 0$ avec $P_n = 1$. Supposons la propriété établie au rang n et passons à $n+1$. Un calcul facile donne :

$$f^{(n+1)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{P_n(x) + x^2 P_n'(x) - 2nxP_n(x)}{x^{2n+2}}$$

et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^2 P_n'(x) - 2nxP_n(x)$ est bien un polynôme non nul en 0.

On peut maintenant en finir avec le théorème. Lorsque x tend vers 0, dans l'expression de $f^{(n)}(x)$ les deux termes $e^{-\frac{1}{x}}$ et x^{2n} tendent vers 0, mais c'est l'exponentielle qui l'emporte, d'où le résultat.

2 Normalisations

2.1 Une fonction plate en 0 et 1

Notre objectif est de fabriquer une fonction croissante $h : [0, 1] \to [0, 1]$, avec $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$ et plate à la fois en 0 et en 1.

Il est facile d'avoir une fonction plate seulement en 0 qui convienne, il suffit de prendre[1] $f(x) = e.e^{-\frac{1}{x}}$ et on a bien $f(1) = 1$.

On renverse ensuite f pour avoir une fonction plate en 1. La fonction définie pour $x < 1$ par $e^{-\frac{1}{1-x}}$ et prolongée par 0 au-delà de 1 est plate en 1. On la normalise pour qu'elle vaille 1 en 0 : $e^{1-\frac{1}{1-x}}$, puis on la renverse pour échanger, sur les y, les rôles de 0 et 1, autrement dit, on définit

$$g(x) = 1 - e^{1-\frac{1}{1-x}}$$

pour $x < 1$ et $g(x) = 1$ pour $x > 1$. Cette fonction est C^∞, elle vaut 0 en 0 et 1 en 1, elle est croissante et ses dérivées d'ordre ≥ 1 sont toutes nulles en 1.

On a alors le théorème suivant :

2.1 Théorème. *Avec les notations précédentes, la fonction h définie par $h(x) = 0$ pour $x \leq 0$, $h(x) = f \circ g(x)$ pour $0 < x < 1$ et $h(x) = 1$ pour $x \geq 1$ est C^∞ et plate en 0 et 1.*

[1] Désormais la lettre f désigne cette fonction.

Démonstration. Il s'agit de montrer que les dérivées $h^{(n)}(x)$ tendent vers 0 en 0^+ et 1^-. Comme les dérivées de f sont nulles en 0 et celles de g nulles en 1, cela résulte aussitôt du lemme suivant :

2.2 Lemme. *Soient f, g, h des fonctions C^∞ avec $h = g \circ f$. Pour $n \geq 1$ $h^{(n)}(x)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme :*

$$(*) \qquad f^{(k)}(g(x))\, g^{(n_1)}(x) \cdots g^{(n_k)}(x)$$

avec $n \geq k \geq 1$ et $n_1, \ldots, n_k \geq 1$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$ on a bien $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$. Pour passer de n à $n+1$ il suffit d'examiner la dérivée du terme $(*)$. On obtient :

$$f^{(k+1)}(g(x))\, g'(x) g^{(n_1)}(x) \cdots g^{(n_k)}(x) + f^{(k)}(g(x))\, g^{(n_1+1)}(x) \cdots g^{(n_k)}(x) + \cdots$$
$$+ f^{(k)}(g(x))\, g^{(n_1)}(x) \cdots g^{(n_k+1)}(x),$$

d'où le résultat.

2.2 Une fonction plate bien placée

On peut maintenant construire une fonction plate "bien placée" :

2.3 Théorème. *On conserve les notations précédentes. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. La fonction $k := k_{a,b;c,d}$ définie par $k(x) = c$ pour $x \leq a$, $k(x) = c + (d - c)\, h\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ et par $k(x) = d$ pour $x \geq b$ est monotone, de classe C^∞ et plate en a et b.*