À propos de la définition de la limite d'une fonction en un point

Daniel PERRIN

Les lignes qui suivent ont pour but de clarifier la définition de la limite d'une fonction en un point en explicitant les deux possibilités couramment adoptées et en donnant quelques arguments en faveur de l'une d'entre elles. Mon opinion, c'est que ce choix n'a pas une grande importance du point de vue mathématique, mais que c'est un point qu'il faut avoir bien compris au CAPES, pour plusieurs raisons. D'abord, quel que soit le choix effectué, il faut le justifier et le défendre en veillant à la cohérence de ce qu'on écrit. En effet, dans chaque cas, le sujet recèle quelques pièges qu'il faut savoir éviter. Ensuite, le jury lui-même n'est pas toujours au clair sur la question et les opinions des membres d'un même jury peuvent être divergentes et parfois très arrêtées sur la question[1]*, ce qui nécessite encore plus de précision.*

1 Les deux définitions

1.1 Les énoncés

Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles ou complexes et soit a un point adhérent à E. Rappelons que cela signifie que dans tout intervalle contenant a il y a au moins un point de E. On note alors $a \in \overline{E}$. C'est bien entendu le cas si a est dans E. C'est aussi le cas, par exemple, si $E =]a, b[$: a est adhérent à E. On peut d'ailleurs, si l'on ne veut pas prendre de risques, se limiter au cas où E est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

1.1 Définition. *On dit que f a pour limite l en a si on a :*
$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$

1. Voir le texte http ://skhole.fr/l-imposture-de-l-enseignement-scientifique-dans-les-lycees-francais-par-bertrand-rungaldier

1.2 Définition. *On dit que f a pour limite l en a si on a :*
$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, \big(x \neq a \text{ et } |x-a| < \eta\big) \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$

1.2 Similitudes et différences

La seule différence entre les deux définitions c'est que dans la deuxième on ne regarde que les points $x \in E$ différents de a.

• Si a n'est pas dans E, les deux définitions coïncident puisque x ne peut être égal à a. C'est un point essentiel car cela recouvre notamment le cas du calcul du nombre dérivé d'une fonction. En effet, l'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'est pas défini en a. C'est le cas par exemple quand on cherche la limite de $\sin x/x$ en 0.

• Si a est dans E les deux définitions ne sont pas équivalentes.

Avec la première définition une fonction ne peut avoir d'autre limite en a que sa valeur $f(a)$. Autrement dit, si elle a une limite en un point a où elle est définie c'est qu'elle est continue en a. En effet, il suffit d'appliquer la définition avec $x = a$. On trouve $|f(a) - l| < \epsilon$ et ceci pour tout $\epsilon > 0$, ce qui impose $f(a) = l$.

Avec la deuxième définition, en revanche, f peut avoir une limite sans être continue. Considérons par exemple la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Avec la première définition f n'a pas de limite en 0, avec la deuxième elle admet la limite 0.

Je résume : les définitions sont équivalentes dans deux cas essentiels :
1) si la fonction est continue en a,
2) si la fonction n'est pas définie en a.

Elles divergent dans le cas d'une fonction continue pour laquelle on remplace la valeur en a par une valeur fantaisiste. Avec la définition 1) elle n'a pas de limite, avec la définition 2) elle a pour limite la valeur qui la rend continue.

2 Discussion

2.1 Le choix de la définition 1

La première définition est celle qui était donnée autrefois[2] dans l'enseignement secondaire, la seconde est celle que l'on donne souvent dans les cours

2. Précisément à partir de 1983 – car auparavant c'était plutôt la deuxième – et jusqu'au milieu des années 1990. Depuis, on ne dit plus précisément ce qu'est une limite. Avec le retour des quantificateurs la définition va peut-être refaire surface.

de L1, L2 à l'Université, en particulier en pensant aux exemples comme celui ci-dessus.

Il faut bien comprendre que le choix de l'une ou de l'autre définition n'est pas d'une importance mathématique capitale pourvu qu'on soit **cohérent**. Cependant je vous propose, pour le CAPES, d'adopter la définition 1. Attention, ce choix n'est pas évident et d'autres collègues font légitimement le choix opposé ! Voici trois arguments, dont aucun n'est très convaincant :

• *argument d'autorité*

C'est la définition de Bourbaki, notre maître à tous.

• *argument de commodité*

C'est la définition qui a été utilisée dans l'enseignement secondaire et qui va peut-être y revenir (mais les programmes ne sont pas clairs là-dessus). Or vous vous destinez à être professeurs dans le second degré ... et il y a beaucoup de profs du secondaire dans le jury de CAPES.

• *argument mathématique*

La définition 2 conduit à un (petit) canular en ce qui concerne la composition des limites. Voici le résultat que l'on voudrait avoir :

2.1 Théorème. *Soient* $f : E \to \mathbf{R}$ *et* $g : F \to \mathbf{R}$ *deux fonctions avec* $f(E) \subset F$ *(de sorte que* $g \circ f$ *est définie sur* E*). Soit* $a \in \overline{E}$*. On suppose que* f *admet la limite* b *en* a *avec* $b \in \overline{F}$ *et que* g *admet la limite* l *en* b*. Alors* $g \circ f$ *admet la limite* l *en* a*.*

Ce théorème est vrai si on utilise la première définition.

On se donne $\epsilon > 0$. Vu l'hypothèse sur g il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait $|g(y) - l| < \epsilon$ dès que $|y - b| < \eta$. Mais, η étant maintenant donné, il existe $\zeta > 0$ tel que $|f(x) - b| < \eta$ dès que $|x - a| < \zeta$. Si on a $|x - a| < \zeta$ on a donc $|g(f(x)) - l| < \epsilon$ ce qui montre que $g \circ f$ a pour limite l en a.

En revanche, le théorème est faux si on utilise la deuxième définition. Voici un contre-exemple : on prend f constante égale à 0 sur $\mathbf{R}$ et g définie par $g(x) = 0$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 1$. En n'importe quel point $a \in \mathbf{R}$, f a pour limite 0. Or, au point 0 la fonction g a pour limite 0 (avec la définition 2 !). Pourtant $g \circ f$ est constante et égale à 1 donc admet la limite 1 en a.

2.2 Le choix de la définition 2

Si l'on tient à utiliser la définition 2, ce qui est tout à fait possible, on peut rectifier l'énoncé du théorème 2.1 en imposant que g soit continue en b.

2.2 *Remarque.* Pour comprendre la nécessité de l'hypothèse $f(E) \subset F$, on pensera à l'exemple suivant : $E =]0,1]$, $f(x) = x\,ln(x)$, $a = 0$, $b = 0$, $F =]0, +\infty[$, $g(x) = x\,ln(x)$, $l = 0$. La composée $g \circ f$ n'a aucun sens.

2.3 La cohérence

Quel que soit le choix effectué, il faut veiller à la **cohérence**. En particulier, si vous parlez de limites à droite ou à gauche [3] **il y a exactement le même dilemme** et il faut le résoudre de la même manière sous peine de dire des bêtises. Je m'explique. Soit f une fonction définie sur un intervalle $E =]a, b[$ ou $E = [a, b[$ avec $a < b$. Les deux définitions, pour la limite à droite en a sont les exactement les mêmes que 1.1 et 1.2, (mais on s'est restreint à E, donc à droite de a) :

2.3 Définition. *On dit que f a pour limite l à droite en a si on a :*
$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$

2.4 Définition. *On dit que f a pour limite l à droite en a si on a :*
$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ \big(x \neq a \text{ et } |x - a| < \eta\big) \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$

On définit de même les limites à gauche et le théorème en vue est le suivant :

2.5 Théorème. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a. Alors f admet une limite l en a si et seulement si elle admet en a une limite à gauche et une limite à droite et si ces limites sont égales.*

Ce qu'il ne faut pas faire [4] c'est changer d'âne au milieu du gué. Considérons toujours la fonction nulle sur $\mathbf{R}$ sauf en 0 où elle vaut 1. Les deux erreurs à ne pas faire sont les suivantes :

• Définir la limite avec 1.1 et les limites à gauche et à droite avec 2.4. En effet, alors, la fonction admet des limites à gauche et à droite égales, mais pas de limite en a.

• Définir la limite avec 1.2 et les limites à gauche et à droite avec 2.3. En effet, alors, la fonction n'a de limite ni à gauche ni à droite, mais elle a une limite en a.

---

3. Ce qui n'est pas du tout obligatoire au niveau du CAPES.
4. Voir le texte cité dans la Note 1.