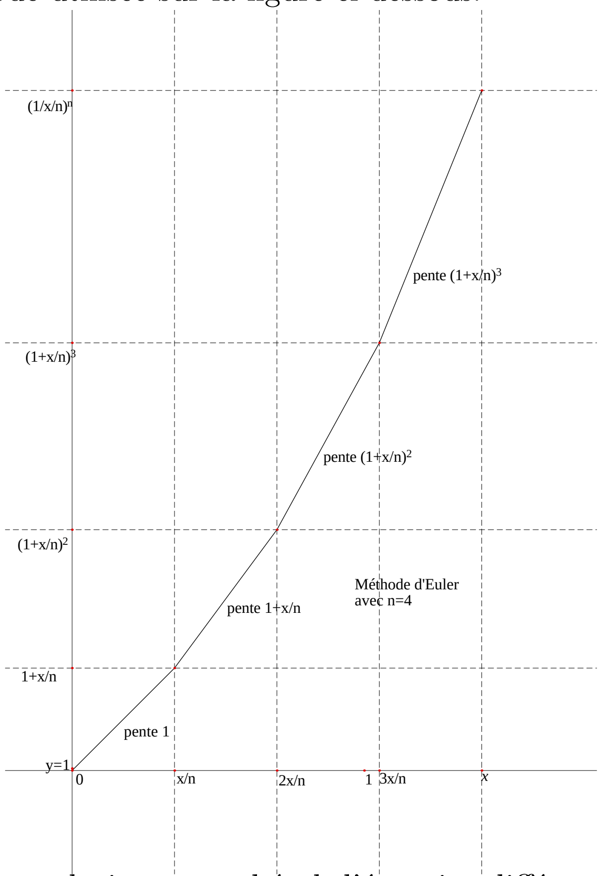
Une définition de la fonction exponentielle dans l'esprit des nouveaux programmes

0. Introduction.

Les nouveaux programmes de mathématiques de terminale S qui sont entrés en vigueur à la rentrée 2002 incitent fortement à introduire la fonction exponentielle comme la solution de l'équation différentielle $y' = y$ (notée $(*)$ dans ce qui suit) vérifiant $y(0) = 1$, avec éventuellement, ensuite, une définition du logarithme comme fonction réciproque de l'exponentielle. Le document d'accompagnement des programmes propose une preuve directe (sans utiliser le logarithme, ni le théorème de Cauchy-Lipschitz) de l'existence d'une telle solution. Je donne une variante de cette preuve ci-dessous, peut-être un peu plus naturelle que la version originale. Cette démonstration est élémentaire (du niveau d'un élève de terminale S avec les nouveaux programmes), mais très astucieuse.

1. La méthode d'Euler.

C'est la méthode utilisée sur la figure ci-dessous.



On construit une solution approchée de l'équation différentielle, affine par morceaux, par la méthode suivante. On part du point $x = 0$, $y = 1$ donné par la condition initiale. On fixe un réel x. On subdivise l'intervalle $[0,x]$ en n parties égales par les points $0, \frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \cdots, \frac{(n-1)x}{n}, x$. Puis, sur $[0, \frac{x}{n}]$, on construit la fonction affine, qui vaut 1 en 0 et dont la pente vaut $y'(0) = y(0)$, conformément à $(*)$. En x/n cette fonction vaut $1 + x/n$. On repart alors de ce point, pour une deuxième fonction affine définie sur $[\frac{x}{n}, \frac{2x}{n}]$, de pente $y'(x/n) = y(x/n) = 1 + x/n$, toujours conformément à $(*)$. En $2x/n$ cette fonction vaut $(1 + x/n)^2$. On continue cette procédure jusqu'au point x où la fonction affine par morceaux ainsi construite vaut $\big(1 + \dfrac{x}{n}\big)^n$.

2. Existence de l'exponentielle.

Pour montrer l'existence d'une solution (exacte) de $(*)$, on va utiliser la suite fournie par la méthode d'Euler $u_n(x) = \big(1 + \dfrac{x}{n}\big)^n$.
On commence par un résultat bien connu (on notera que y peut être < 0) :

Lemme 2.1 (inégalité de Bernoulli).
Soit y un réel ≥ -1 et n un entier naturel. On a $(1+y)^n \geq 1 + ny$.

Démonstration. On peut soit étudier la fonction, soit démontrer l'assertion par récurrence.

Théorème et définition 2.2.
Soit x un réel. Les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ définies pour $n > |x|$ par :

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

sont adjacentes. Leur limite commune est notée $\exp(x)$ *et appelée exponentielle de* x.

Remarque 2.3. La suite $u_n(x)$ est directement issue de la méthode d'Euler. Pour comprendre l'origine de la suite $v_n(x)$, on note que $u_n(-x)$ converge vers $\exp(-x)$, donc (en anticipant sur la relation fonctionnelle) il est normal que $v_n(x)$, qui n'est autre que $1/u_n(-x)$, converge aussi vers $\exp(x)$.

Démonstration. Le plus délicat est de montrer la croissance de $u_n(x)$. Posons $a_n = 1 + \dfrac{x}{n}\cdot$ On note que a_n est > 0 (à cause de l'hypothèse $n > |x|$). Il s'agit de montrer $u_{n+1}(x) = a_{n+1}^{n+1} \geq u_n(x) = a_n^n$, soit encore $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n \times a_{n+1} \geq 1$. On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n(n+1+x)}{(n+x)(n+1)}$ et cette quantité tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, de sorte qu'il est naturel de l'écrire sous la forme :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)} = 1 + y\cdot$$

L'inégalité de Bernoulli (qu'on utilise avec $-1 \leq y < 0$, d'où l'utilité d'avoir toléré $y < 0$ dans ce lemme) donne alors :

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n a_{n+1} \geq \left(1 - \frac{nx}{(n+x)(n+1)}\right)\big(1 + \frac{x}{n+1}\big)$$

et un calcul immédiat montre que cette quantité est ≥ 1.

Pour obtenir la décroissance de $(v_n(x))$ il suffit d'utiliser la formule $v_n(x) = \dfrac{1}{u_n(-x)}$ vue en 2.3.
Enfin, on a :

$$v_n(x) - u_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} = v_n(x) \times \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n}\right)$$

et on en déduit, par Bernoulli (appliqué avec $y = -\dfrac{x^2}{n^2}$, là encore, la précaution d'avoir admis $y < 0$ est importante) :

$$0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x) \times \frac{x^2}{n} \cdot$$

Comme $v_n(x)$ est décroissante à partir d'un certain rang, donc majorée, cette quantité tend bien vers 0.

Théorème 2.4.
La fonction exp *est dérivable et on a* $\exp' = \exp$.

Démonstration. L'idée de cette preuve est toute simple. La suite $u_n(x)$ converge vers $\exp(x)$. Or, u_n est dérivable et on a $u_n'(x) = \big(1 + \dfrac{x}{n}\big)^{n-1}$, ce qui montre que $u_n'(x)$ converge aussi vers $\exp(x)$ (car $1 + \frac{x}{n}$ tend vers 1). On a donc envie de passer à la limite et d'affirmer que la dérivée de l'exponentielle est elle-même et nul doute qu'Euler aurait fait ça sans hésiter. Bien entendu, on sait aujourd'hui qu'il faut prendre quelques précautions, mais finalement elles sont minimes.

Nous aurons besoin de l'inégalité des accroissements finis :

Lemme 2.5.
Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ avec $a \leq b$. On suppose qu'on a, pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f'(x) \leq M$. Alors, on a pour tout $x \in [a, b]$:

$$m(x - a) \leq f(x) - f(a) \leq M(x - a).$$

Démonstration. Même si cette inégalité n'est plus au programme de terminale, sa preuve n'en reste pas moins immédiate : on étudie les fonctions différences.

L'idée de la preuve de 2.4 est de calculer la limite du taux d'accroissement de la fonction exp. Pour cela on a le lemme suivant :

Lemme 2.6.
On a, pour $x, h \in \mathbf{R}$:

$$(**) \qquad h \exp(x) \leq \exp(x + h) - \exp(x) \leq h \exp(x + h).$$

Démonstration. Supposons d'abord $h > 0$. On a $u_n'(t) = \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{n-1}$ donc $u_n''(t) = \dfrac{n-1}{n}\left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{n-2}$. Pour $n > |x|$ la fonction $u_n''(t)$ est positive sur $[x, x+h]$, donc u_n' est croissante et on a $u_n'(x) \leq u_n'(t) \leq u_n'(x+h)$ pour $t \in [x, x+h]$. On en déduit, par les accroissements finis :

$$hu_n'(x) \leq u_n(x+h) - u_n(x) \leq hu_n'(x+h)$$

d'où le résultat en faisant tendre n vers l'infini.

Pour le cas $h < 0$ on applique ce qui précède avec $X = x + h$ et $X + |h| = x$.

On peut maintenant prouver 2.4. On note d'abord qu'on a, par $(**)$ et pour $h < 1$, l'inégalité :

$$(1+h)\exp x \leq \exp(x+h) \leq \frac{\exp x}{1-h}.$$

Il en résulte que exp est continue en x : quand h tend vers 0, $\exp(x+h)$ tend vers $\exp x$. Reprenant alors $(**)$ divisée par h on en déduit aussitôt que exp est dérivable et qu'elle est sa propre dérivée.

Corollaire 2.7.
La fonction exp *est de classe* C^∞.

3. Unicité et propriétés de l'exponentielle.

a) Unicité.

Il s'agit maintenant de montrer les propriétés de la fonction exponentielle qui vient d'être introduite et d'abord l'unicité de la solution de l'équation différentielle. On commence par un lemme :

Lemme 3.1.
On a $\exp(x)\exp(-x) = 1$ *pour tout* x *réel. La fonction* exp *est strictement positive sur* $\mathbf{R}$.

Démonstration. On considère la fonction g définie par $g(x) = \exp(x)\exp(-x)$. On vérifie aussitôt avec $(*)$ qu'on a $g'(x) = 0$, de sorte que g est constante sur $\mathbf{R}$. Comme on a $\exp(0) = 1$, cette constante est égale à 1 ce qui prouve que exp ne s'annule pas. Comme on a $\exp(0) = 1 > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que exp est strictement positive.

Théorème 3.2.
Soient λ *et* a *deux réels. Il existe une unique fonction* f *dérivable sur* $\mathbf{R}$ *qui vérifie* $f' = \lambda f$ *et* $f(0) = a$ *et on a* $f(x) = a\exp(\lambda x)$ *pour tout* x *réel.*

Démonstration. Il est clair que $a\exp(\lambda x)$ vérifie les conditions. Réciproquement, si f est une solution, on considère g définie par $g(x) = f(x)\exp(-\lambda x)$. On vérifie que la dérivée g' est nulle, donc que g est constante et égale à a. Le théorème découle alors du lemme 3.1.

b) L'équation fonctionnelle.

Théorème 3.3.
La fonction exponentielle vérifie l'équation fonctionnelle :

$$(***) \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}, \qquad f(x+y) = f(x)f(y).$$

Démonstration. Fixons y et posons $g(x) = \exp(x+y) - \exp(x)\exp(y)$. On a $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 0$, de sorte que g est nulle en vertu de 3.2.

Remarque 3.4. On montre que les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ (ou même seulement continues en un point) et non identiquement nulles qui vérifient l'équation fonctionnelle $(***)$ sont les fonctions $\exp(\lambda x)$ pour λ réel.

c) Variations de exp.

Proposition 3.5.
La fonction exp *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}$. *On a* $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

Démonstration. La première assertion vient de l'équation différentielle et de 3.1. La seconde s'obtient en montrant qu'on a $\exp(x) \geq x$ pour $x \geq 0$ (en considérant $\exp(x) - x$). La troisième résulte de la formule $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}\cdot$

Corollaire 3.6.
La fonction exp *est une bijection de* $\mathbf{R}$ *sur* $\mathbf{R}_+^*$. *On appelle logarithme népérien et on note* ln *sa fonction réciproque. La fonction* ln *est dérivable et sa dérivée est la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}\cdot$

Proposition 3.7.
On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$.

Démonstration. On étudie la fonction $\exp(x) - \dfrac{x^n}{n!}\cdot$