1 La formule de Taylor-Young

1.1 Théorème. *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ et soit a un point de I. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction et n un entier ≥ 0. On suppose que f est n fois dérivable sur I. Alors, il existe une fonction $\epsilon(x)$ définie sur I, qui tend vers 0 quand x tend vers a, telle que l'on ait pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+(x-a)^n\epsilon(x).$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$ l'hypothèse implique que f est continue en a et la formule est évidente avec $\epsilon(x) = f(x) - f(a)$. Pour $n = 1$, la formule n'est autre que le développement limité de f à l'ordre 1 au point a, dont l'existence équivaut à la dérivabilité de f en a. Supposons la formule vraie pour $n-1$, $n \geq 2$, et passons à n. On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre $n-1 \geq 1$ à la fonction f' qui en vérifie les hypothèses. En particulier, elle est dérivable, donc continue. On a donc pour tout $t \in I$:

$$f'(t) = f'(a) + (t-a)f''(a) + \cdots + \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a) + (t-a)^{n-1}\epsilon_0(t)$$

où $\epsilon_0(t)$ tend vers 0 quand t tend vers a. On note que la fonction $(t-a)^{n-1}\epsilon_0(t)$ est différence de deux fonctions continues (la fonction f' et le polynôme de Taylor), donc qu'elle est continue. On peut intégrer l'égalité précédente entre a et x ($x \neq a$) et on obtient :

$$\int_a^x f'(t)dt = (x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^x (t-a)^{n-1}\epsilon_0(t)dt.$$

L'intégrale du premier membre vaut $f(x) - f(a)$. On définit la fonction $\epsilon(t)$ par la formule $\epsilon(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}\displaystyle\int_a^x (t-a)^{n-1}\epsilon_0(t)dt$ et par $\epsilon(a) = 0$. Avec cette fonction on a la formule de Taylor pour f et il reste à montrer que $\epsilon(x)$ tend bien vers 0 quand x tend vers a. Pour cela, soit $\epsilon > 0$. Comme ϵ_0 tend vers 0 en a, il existe $\eta > 0$ tel que $|t-a| < \eta$ implique $|\epsilon_0(t)| < \epsilon$. Si on suppose $|x-a| < \eta$ on a donc :

$$|\epsilon(x)| \leq \epsilon\frac{1}{|x-a|^n}\left|\int_a^x (t-a)^{n-1}dt\right| = \epsilon/n.$$

On en déduit que, pour $|x-a| < \eta$ on a $|\epsilon(x)| < \epsilon/n$ ce qui signifie que $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a, cqfd.

1.2 *Remarque.* C'est la preuve ci-dessus qui permet de comprendre l'origine de la formule. On sait que si f est dérivable on a $f(x) = f(a) = (x-a)f'(a) + (x-a)\epsilon(x)$ (développement limité à l'ordre 1. Si f est deux fois dérivable, on applique ce qui précède à f' et on a $f'(t) = f'(a) + (t-a)f''(a) + (t-a)\epsilon_0(t)$. C'est en intégrant cette expression de a à x qu'on voit apparaître le terme en $f''(a)(x-a)^2/2!$ de la formule de Taylor.

2 Discussion

2.1 La version forte du théorème

En réalité, les hypothèses proposées ci-dessus sont trop fortes. Le théorème donné habituellement est le suivant :

2.1 Théorème. *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ et soit a un point de I. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction et n un entier ≥ 0. On suppose que f est $n-1$ fois dérivable sur I et n fois dérivable en a. Alors, il existe une fonction $\epsilon(x)$ définie sur I, qui tend vers 0 quand x tend vers a, telle que l'on ait pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\epsilon(x).$$

Il n'est pas évident de montrer ce théorème par la méthode précédente, contrairement à ce que j'avais cru dans un premier temps[1]. Le problème, c'est que, si l'on fait seulement les hypothèses de 2.1, il y a un piège dans l'application de la récurrence pour le cas $n = 2$. En effet, dans ce cas, contrairement à l'argument invoqué ci-dessus, on ne sait pas que f' est continue (alors que, pour $n > 2$, il n'y a plus de problème car f est $n-1$ fois dérivable, donc f' $n-1$ fois dérivable, donc dérivable, donc continue).

Il y a deux façons de se sortir de ce guêpier. L'une, classique, que l'on trouvera dans n'importe quel livre de prépa[2], consiste à utiliser l'inégalité des accroissements finis plutôt que d'intégrer. Le défaut de cette méthode est que la remarque 1.2 sur l'origine de la formule ne s'applique plus. L'autre méthode consiste à copier la preuve de 1.1, avec des outils plus avancés (notamment l'intégrale de Lebesgue). Cette voie n'est évidemment pas à utiliser au CAPES, mais je la donne pour ma satisfaction personnelle.

[1]Je remercie vivement Pascal Gamblin de m'avoir signalé mon erreur.

[2]Voir aussi le polycopié de CAPES de Pascal Gamblin dont on trouvera une copie sur ma page web.

Démonstration. (de 2.1) Comme on l'a dit, il suffit de montrer le théorème pour $n = 2$. On note d'abord que la propriété à montrer est locale, de sorte qu'on peut à loisir diminuer l'intervalle I. Le point essentiel, pour copier la démonstration de 1.1, c'est de pouvoir intégrer f' et surtout d'avoir la formule "fondamentale" $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$, le reste étant identique. Pour cela on utilisera le résultat suivant (voir Rudin, *Analyse réelle et complexe*, th. 8.21 p. 161) :

2.2 Théorème. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *une fonction dérivable. On suppose que* f' *est intégrable au sens de Lebesgue sur [a,b]. Alors on a la formule* $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$.

Il reste à montrer que f' est intégrable au voisinage de a. On note d'abord qu'elle est mesurable en l'écrivant comme limite des fonctions $f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$. On note ensuite que, quitte à restreindre I, on peut supposer que $|f'|$ est bornée[3] sur I. En effet, soit $\epsilon > 0$. Comme $\dfrac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$ tend vers $f''(a)$, il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait, pour $x \in [a - \eta, a + \eta]$:

$$|f'(x)| \leq |f'(a)| + 2\eta(|f''(a)| + \epsilon).$$

Comme f' est mesurable et bornée sur l'intervalle borné $I = [a - \eta, a + \eta]$, elle est intégrable.

[3] C'est le point essentiel.