À propos du principe de Lagrange

0.1 L'énoncé

Je me contente du cas croissant, pour le cas décroissant on raccroche la casserole.

0.1 Théorème. *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que, pour tout $x \in]a,b[$, on a $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) \geq 0$). Alors la fonction f est strictement croissante (resp. croissante) sur $[a,b]$.*

0.2 *Remarque.* Il suffit de faire le cas $f' > 0$. En effet, si on suppose $f' \geq 0$, on prend $\epsilon > 0$ et regarde $g(x) = f(x) + \epsilon x$. Elle vérifie les mêmes hypothèses, mais avec $g' > 0$. Elle est donc strictement croissante, et ce, pour tout ϵ. On a ainsi, si $x < y$, $f(x) + \epsilon x < f(y) + \epsilon y$. Si l'on fait tendre ϵ vers 0, on a le résultat attendu.

0.2 Démonstration avec le théorème des accroissements finis (TAF)

La démonstration est évidente. On prend $x, y \in [a,b]$ avec $x < y$. On applique TAF sur $[x,y]$. Il existe $c \in]x,y[\subset]a,b[$ vérifiant :

$$f(y) - f(x) = (y-x)f'(c).$$

Comme $f'(c)$ est > 0, on a bien $f(y) - f(x) > 0$.

0.3 Démonstration par dichotomie

Dans cette preuve, on n'utilise ni Rolle, ni TAF. On peut donc – en théorie au moins – la donner au niveau terminale.

0.3.1 Étape 1

Soient $x, y \in]a,b[$, avec $x < y$. On montre qu'on a $f(x) \leq f(y)$. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $f(x) > f(y)$. On construit alors par dichotomie des suites (a_n) et (b_n) avec $a_0 = x$, $b_0 = y$, $b_n - a_n = (y-x)/2^n$ et telles que l'on ait, pour tout n, $f(a_n) > f(b_n)$. Le passage du cran n au cran $n+1$ se fait ainsi. On regarde $m = \dfrac{a_n + b_n}{2}\cdot$ Si on a $f(m) < f(a_n)$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$. Sinon, on a $f(m) \geq f(a_n) > f(b_n)$ et on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, donc elles ont une limite commune c, qui est dans $[a_0, b_0] = [x, y] \subset]a, b[$. La fonction f est dérivable en c. On a donc un développement limité à l'ordre 1 :

$$f(x) - f(c) = (x - c)f'(c) + \epsilon(x)(x - c)$$

où la fonction ϵ tend vers 0 en c. Comme $f'(c)$ est > 0, pour x assez voisin de c, $f(x) - f(c)$ est du signe de $x - c$. En particulier, pour n grand, $f(c) - f(a_n)$ et $f(b_n) - f(c)$ sont ≥ 0. On en déduit que $f(b_n) - f(a_n)$ est ≥ 0 : contradiction.

0.3.2 Étape 2

On montre ensuite qu'on a, toujours pour $a < x < y < b$, $f(x) < f(y)$. On a vu que f est croissante au sens large sur $]a, b[$. On sait donc qu'on a, au moins, $f(x) \leq f(y)$. S'il y a égalité c'est que f est constante sur $[x, y]$. Mais alors sa dérivée est nulle et c'est absurde.

0.3.3 Étape 3

Il reste le cas des bornes a et b. Fixons un y dans $]a, b[$. On a, pour $a < x < y$, $f(x) < f(y)$. Si l'on fait tendre x vers a, on garde l'inégalité large $f(a) \leq f(y)$. Mais, ceci vaut pour tout y de $]a, b[$. Si on prend maintenant z entre a et y on a donc $f(a) \leq f(z)$, mais aussi $f(z) < f(y)$ et on a gagné.

Le raisonnement est analogue pour b.