Les séries de Fourier

Daniel Perrin

La raison d'être de ce cours est la présence des séries de Fourier au programme de nombreuses sections de BTS (électronique, optique, etc.) et, partant, au programme du CAPES. Le contenu de ces programmes comprend :

• La définition des coefficients de Fourier pour une fonction continue par morceaux, de période T, à la fois sous les formes $\cos n\omega t$ et $\sin n\omega t$ et $e^{in\omega t}$.

• Le théorème de convergence ponctuelle de Dirichlet pour les fonctions de classe C^1 par morceaux (admis).

• La formule de Parseval (admise).

Il est aussi fait allusion à *l'utilisation du développement en série de Fourier d'une fonction périodique pour calculer la somme d'une série numérique.*

Dans ce qui suit nous allons aborder tous ces thèmes, en allant nettement plus loin que les programmes de BTS.

1 Introduction, notations et rappels

1.1 Motivation

L'intérêt des séries de Fourier [1] apparaît notamment quand on cherche à résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre associées aux circuits électriques. Considérons un circuit RLC comprenant un condensateur de capacité C, une bobine d'inductance L et une résistance R. On envoie dans ce circuit un courant alternatif, dont la tension est une fonction périodique $s(t)$, et on s'intéresse à la charge $q(t)$ du condensateur. L'équation (E) qui régit ce circuit est $Lq'' + Rq' + \dfrac{q}{C} = s(t)$. On sait qu'on en trouve les solutions en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène (E_0) associée à (E) une solution particulière de (E). Lorsque le signal s est sinusoïdal, par exemple $s(t) = \sin \omega t$, c'est facile car on cherche une solution de la forme [2] $a \cos \omega t + b \sin \omega t$. Mais, souvent, le signal fourni est plus compliqué, et pas forcément régulier (signal en créneau ou en dent de scie par exemple). Si l'on a une décomposition de $s(t)$ en somme de fonctions trigonométriques : $s(t) = \sum_{n=0}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$ le calcul est encore facile en traitant séparément le cas de chaque terme (on parle d'harmoniques) et en les ajoutant (principe de superposition). En général on ne peut espérer avoir un tel

1. Joseph Fourier (1768-1830) a introduit les séries qui portent son nom à propos d'une autre question de physique : l'équation de la chaleur.

2. Sauf dans le cas de résonance.

développement avec une somme finie et c'est pourquoi on va essayer d'écrire la fonction périodique s comme somme d'une **série** trigonométrique. C'est toute la problématique des séries de Fourier.

1.2 Le cadre

Rappelons quelques définitions indispensables.

1.1 Définition. *Une fonction* $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ *est dite continue (resp. de classe* C^p*) par morceaux sur* $[a, b]$ *s'il existe une subdivision* $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ *et des fonctions* f_i *continues (resp. de classe* C^p*) sur* $[a_i, a_{i+1}]$ *telles que* f *soit égale à* f_i *sur l'intervalle ouvert* $]a_i, a_{i+1}[$.

1.2 *Remarque.* Une fonction continue par morceaux n'est pas nécessairement continue aux points de subdivision, mais elle admet en ces points x une limite à gauche (resp. à droite) notée $f(x^-)$ (resp. $f(x^+)$).

1.3 Définition. *Soit* T *un nombre réel* > 0. *Une fonction* f *définie sur* $\mathbf{R}$ *est dire* **périodique** *de période* T *si l'on a, pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $f(x + T) = f(x)$. *Le nombre* $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ *est appelé*[3] **pulsation** *associée à* T.

On notera que si f est périodique de période T elle l'est aussi de période $2T, 3T, ...$ ou $-T, -2T, ...$ Une fonction de période T est entièrement donnée par sa restriction à un intervalle de la forme $[a, a+T]$. Une fonction périodique sera dite de classe C^p par morceaux si elle l'est sur un tel intervalle.

1.3 Deux formules

1.4 Proposition. *Soit* f *une fonction périodique de période* T *continue par morceaux sur* $\mathbf{R}$. *On a les formules :*

1) Pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(u)\,du$.

2) Pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$.

Démonstration. Pour 1), on effectue le changement de variables $u = t + T$ et on utilise la périodicité, pour 2) on utilise la relation de Chasles :

$$\int_a^{a+T} = \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T}$$

et le point 1).

3. La fonction $\sin \omega t$ est alors périodique de période T : $\sin \omega(t + T) = \sin \omega t$ car $\omega T = 2\pi$. C'est ainsi qu'on peut retenir la formule donnant la pulsation.

1.4 Deux exemples

Les exemples suivants correspondent à des signaux classiques et on les trouve souvent, avec des variantes, dans les exercices de BTS :

• La fonction **créneau**, par exemple de période 2π, qui vaut 1 sur $[0, \pi]$ et 0 sur $]\pi, 2\pi[$.

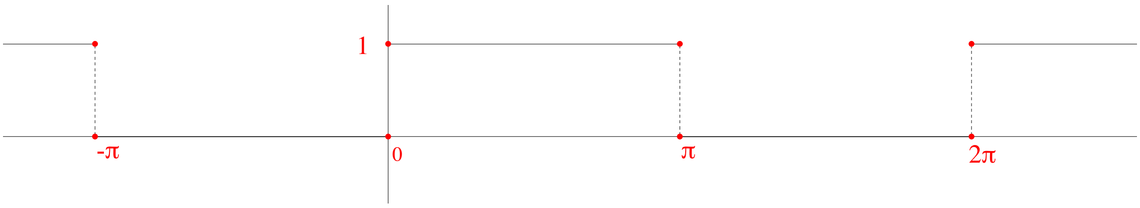

Figure 1 – La fonction créneau

• La fonction [4] **dent de scie** f, paire, périodique de période 2π, définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

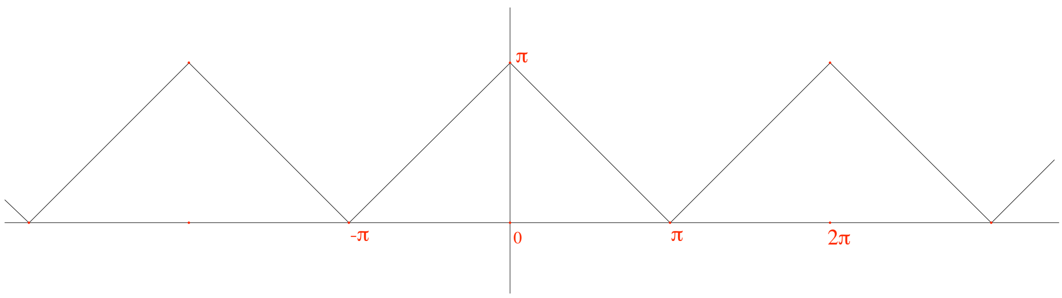

Figure 2 – La fonction dent de scie

2 Les coefficients de Fourier

2.1 Un peu de géométrie

Parmi les fonctions périodiques de période T on dispose de trois types de fonctions remarquables : $\cos n\omega t$, $\sin n\omega t$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $e^{in\omega t}$ pour $n \in \mathbf{Z}$. Dans tous les cas $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ est la pulsation associée à T. Notre objectif est d'écrire les autres fonctions comme combinaisons linéaires de celles là.

4. Il y a d'autres dents de scie possibles, par exemple la fonction discontinue, de période π, définie par $f(x) = x$ sur $[0, \pi[$.

Il y a un cadre où l'on sait calculer les coefficients de telles décompositions, c'est celui de l'espace euclidien, avec un produit scalaire, noté $(x|y)$, et une base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$. En effet, si l'on a $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avec $x_i \in \mathbf{R}$, un calcul immédiat montre que les x_i sont donnés par $x_i = (x|e_i)$. C'est exactement la même chose dans le cas complexe, mais avec un produit scalaire hermitien. Or, ici, sur l'espace des fonctions continues par morceaux de période T à valeurs réelles (resp. complexes), on dispose d'un produit scalaire [5] euclidien (resp. hermitien) donné par la formule :

$$(f|g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt,$$

auquel on associe comme d'habitude une norme $\|f\|_2$ par la formule :

$$\|f\|_2^2 = (f|f) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt.$$

La remarque essentielle est alors la suivante :

2.1 Proposition. *1) Les fonctions $e_n(t) := e^{in\omega t}$ pour $n \in \mathbf{Z}$ forment une famille orthonormale pour le produit scalaire ci-dessus.*

2) Les fonctions $\gamma_n(t) := \cos n\omega t$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $\sigma_n(t) := \sin n\omega t$ forment une famille orthogonale pour le produit scalaire ci-dessus.

Démonstration. 1) On calcule $(e_p|e_q) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{ip\omega t}e^{-iq\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(p-q)\omega t}\,dt$ et cette intégrale est nulle sauf pour $p = q$ où elle vaut [6] 1.

2) Le calcul est analogue pour les cosinus et sinus. Il faut connaître quelques formules de trigonométrie ou passer par les exponentielles. On notera les formules $(\gamma_0|\gamma_0) = 1$ et, pour $n \geq 1$, $(\gamma_n|\gamma_n) = (\sigma_n|\sigma_n) = \frac{1}{2}$.

Cette proposition permet de faire de la géométrie. En voici un premier exemple :

2.2 Corollaire. *1) Si f est un polynôme trigonométrique en exponentielles : $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{in\omega t}$ on a la formule : $c_n = (f|e_n) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt$.*

5. Ce n'est pas tout à fait un produit scalaire car $(f|f)$ peut être nul même si f ne l'est pas, par exemple si f est nulle sauf en un nombre fini de points, mais c'est sans importance.

6. On voit que le coefficient $1/T$ a pour but de normer les fonctions.

2) Si f est un polynôme trigonométrique en cosinus et sinus :

$$f(t)=\sum_{n=0}^{N} a_n \cos n\omega t+\sum_{n=1}^{N} b_n \sin n\omega t$$

on a les formules $a_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$ et, pour $n\geq 1$:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt \quad \text{et} \quad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt.$$

2.2 Définition des coefficients de Fourier

Lorsque f est périodique mais pas nécessairement un polynôme trigonométrique, on définit encore ses coefficients de Fourier par les formules ci-dessus :

2.3 Proposition-Définition. *Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ une fonction périodique de période T, continue par morceaux. On définit les* **coefficients de Fourier** *de f par les formules suivantes : $c_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt$ pour $n\in\mathbf{Z}$, $a_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$ et, pour $n\geq 1$:*

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt \quad \text{et} \quad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt.$$

On a les relations[7] : $a_0=c_0$, et, pour $n\geq 1$, $c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$, $c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$, $a_n=c_n+c_{-n}$, $b_n=i(c_n-c_{-n})$.

On a l'égalité $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(t)=\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t}=\sum_{n=0}^{N} a_n\cos n\omega t+\sum_{n=1}^{N} b_n \sin n\omega t$.
Cette quantité est notée $S_N f(t)$ et la **série de Fourier** *de f est la série dont les sommes partielles sont les $S_N f$, autrement dit la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{in\omega t}$ ou sa variante réelle*

$$\sum_{n\geq 0} a_n\cos n\omega t+\sum_{n>0} b_n\sin n\omega t.$$

2.4 *Remarques.* 1) Nous verrons ci-dessous que, pour la théorie, la variante exponentielle est souvent plus commode. En revanche, les exercices de BTS utilisent plutôt les variantes en cosinus et sinus.

7. Certains auteurs définissent a_0 avec $2/T$ comme les a_n. Cela oblige à commencer la série de Fourier par $a_0/2$.

2) Il est souvent utile de noter que si la fonction f est paire (resp. impaire) ses coefficients de Fourier b_n (resp. a_n) sont nuls.

3) Lorsqu'on veut préciser la fonction on note le coefficient $c_n(f)$ voire $\widehat{f}(n)$.

4) Si une série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{in\omega t}$ converge (disons uniformément) vers $f(t)$, on montre, comme dans le cas des polynômes, que les c_n sont les coefficients de Fourier de f.

2.3 Problématique

Quelles sont les questions qui se posent maintenant (et que l'on trouvera dans les exercices de BTS) ? D'abord, il y a le calcul explicite des coefficients de Fourier pour une fonction f donnée (par exemple en créneau ou en dent de scie). C'est en général un calcul sans malice (souvent par intégration par parties), mais non sans risque d'erreur (attention à la valeur de la période, aux reports de constantes, etc.). Il y a ensuite deux questions mathématiques difficiles. La première est celle de la convergence de la série de Fourier de f vers la fonction f (convergence simple, convergence uniforme, etc.). C'est l'objet du théorème de Dirichlet. Elle permettra d'obtenir des formules de sommes de séries en appliquant cette convergence en des points particuliers. La seconde est le calcul de la norme de f. C'est l'objet de la formule de Parseval, généralisation du théorème de Pythagore. Cette formule aura deux types d'applications, des calculs de série (comme Dirichlet), mais aussi des applications physiques (car la norme de f correspond à la valeur efficace du signal et elle est liée à l'énergie du système).

3 Une première approche de la formule de Parseval

3.1 L'énoncé

Le théorème en vue est le suivant :

3.1 Théorème. (Formule de Parseval[8]) *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux, de période T, et a_n, b_n, c_n ses coefficients de Fourier. On a les formules :*

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|^2,$$

8. Marc-Antoine Parseval des Chênes, 1755-1836.

$$\|f\|_2^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|^2.$$

Nous ne démontrerons pas entièrement ce théorème [9], mais nous allons prouver l'inégalité de Bessel qui en est une composante essentielle et nous établirons Parseval dans le cas particulier où f est de classe C^1 (voir Annexe 2) . Notons déjà qu'il suffit de traiter le cas des coefficients c_n, l'autre s'en déduisant au moyen des formules de 2.3. Dans ce qui suit, les notations sont celles de 3.1.

3.2 Le cas d'un polynôme trigonométrique

La formule de Parseval est facile lorsque f est un polynôme trigonométrique : $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{in\omega t}$. C'est un simple calcul euclidien : on a $f = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$, d'où, en calculant le produit scalaire $(f|f) = \sum_{p,q}(c_p e_p|c_q e_q) = \sum_{p,q} c_p\overline{c_q}(e_p|e_q) = \sum_{p,q} c_p\overline{c_q}\delta_{p,q} = \sum_p |c_p|^2$. (On a utilisé la symétrie hermitienne et le fait que la famille e_n est orthonormale, qui donne $(e_p|e_q) = \delta_{p,q}$, symbole de Kronecker.)

3.3 L'inégalité de Bessel

La propriété suivante est aussi une application des techniques euclidiennes :

3.2 Proposition. *Rappelons qu'on pose* $S_N f = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$ *avec* $e_n(t) = e^{in\omega t}$.

On a les formules suivantes :

1) $\|S_N f\|_2^2 = \displaystyle\sum_{-N}^{N} |c_n|^2$,

2) $(f - S_N f|S_N f) = 0$,

3) $\|f\|_2^2 = \|f - S_N f\|_2^2 + \|S_N f\|_2^2$.

Démonstration. Le point 1) a déjà été vu : c'est la formule de Parseval pour un polynôme trigonométrique. Le point 2) vient de 1) et de la "linéarité" du produit scalaire :

$$(f\,|S_N f) = (f\,|\sum_{n=-N}^{n=N} c_n e_n) = \sum_{n=-N}^{n=N} \overline{c_n}(f|e_n) = \sum_{n=-N}^{n=N} \overline{c_n} c_n = (S_N f|S_N f).$$

9. Pour une preuve complète, voir par exemple le polycopié d'intégration sur ma page web : `http://www.math.u-psud.fr/ perrin/Enseignement.html`.

Le point 3) n'est autre le théorème de Pythagore : on calcule le carré scalaire de f en écrivant $f = (f - S_N f) + S_N f$. On a donc $\|f\|_2^2 = \|f - S_N f\|_2^2 + \|S_N f\|_2^2 + (S_N f | f - S_N f) + (f - S_N f | S_N f)$. Mais, en vertu de 2), $f - S_N f$ et $S_N f$ sont orthogonaux, d'où le résultat.

Le corollaire suivant donne un côté de Parseval :

3.3 Corollaire. (Inégalité de Bessel) *La série* $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ *converge et on a* $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2$.

Démonstration. En effet, les sommes partielles de cette série, qui sont les $\|S_N\|_2^2$ sont bien majorées par $\|f\|_2^2$.

Une conséquence très importante de Bessel est la convergence de la suite $|c_n|$ vers 0 :

3.4 Corollaire. (Riemann-Lebesgue) *Les suites* c_n, a_n *et* b_n *tendent vers* 0 *quand* n *tend vers* $\pm\infty$.

Démonstration. Pour c_n c'est clair car la série des $|c_n|$ converge et on en déduit les a_n, b_n par 2.3.

4 Le théorème de Dirichlet

C'est le résultat suivant, qui assure la convergence ponctuelle de la série de Fourier vers la fonction f, sauf aux points de discontinuité :

4.1 Théorème. (Dirichlet [10]) *Soit* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *une fonction périodique de période* T*, de classe* C^1 *par morceaux. Alors, pour tout* $x \in \mathbf{R}$*, la série de Fourier* $S_N f(x)$ *converge vers* $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

4.2 *Remarque.* Bien entendu, si f est continue en x, on a $f(x^-) = f(x^+) = f(x)$ donc $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x)$.

Démonstration. La preuve nécessite quelques étapes. On note déjà qu'on peut supposer que la période de f est égale à 2π, quitte à remplacer $f(t)$ par $g(t) = f(2\pi t/T)$. On utilise ici la variante complexe avec les exponentielles. Rappelons qu'on a $c_n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt$. On en déduit :

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}\, dt.$$

10. Peter Lejeune-Dirichlet, 1805-1859, mathématicien allemand.

Dans un premier temps, nous allons supposer f continue, voir l'Annexe 1 pour le cas général. Il s'agit donc de montrer que $S_N f(x)$ tend vers $f(x)$ quand N tend vers $+\infty$, pour $x \in \mathbf{R}$ fixé.

4.1 Idée numéro 1 : la convolution

Quiconque à déjà rencontré l'opération de convolution $\int f(t)g(x-t)\,dt$ que l'on voit ici, sait qu'il faut effectuer le changement de variable $u = x - t$ qui change la différence de côté. Dans le cas présent on obtient :

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) \sum_{n=-N}^{N} e^{inu}\, du.$$

4.2 Idée numéro 2 : décaler l'intervalle d'intégration

Comme les fonctions dans l'intégrale sont de période 2π, il résulte de 1.4 qu'on a aussi :

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \sum_{n=-N}^{N} e^{inu}\, du.$$

4.3 Idée numéro 3 : la somme de la série géométrique

La somme $K_N(u) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{inu} = e^{-iNu} \sum_{n=0}^{2N} e^{inu}$ est la somme d'une série géométrique et elle se calcule comme telle. On a :

$$K_N(u) = e^{-iNu} \frac{1 - e^{i(2N+1)u}}{1 - e^{iu}} = e^{-iNu} \frac{(1 - e^{i(2N+1)u})(1 - e^{-iu})}{2(1 - \cos u)}$$

$$= \frac{\cos Nu - \cos(N+1)u}{1 - \cos u} = \frac{2 \sin \frac{(2N+1)u}{2} \sin \frac{u}{2}}{2 \sin^2 \frac{u}{2}}.$$

En définitive, on a donc $K_N(u) = \dfrac{\sin(N + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}}$.

4.4 Idée numéro 4 : K_N est un noyau

Dans le langage des séries de Fourier, cela signifie qu'on a $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_N(u)\, du =$ 1 et c'est évident en revenant à l'expression de K_N comme somme d'exponentielles. Cela permet d'écrire $f(x)$ sous une forme analogue à $S_N f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(u) f(x)\, du$$

et d'avoir la différence sous la forme :

$$\Delta_N = S_N f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(u)(f(x-u) - f(x))\, du.$$

4.5 Idée numéro 5 : tenir compte de la valeur de K_N

On remplace K_N par sa valeur dans la dernière intégrale :

$$\Delta_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(u))\, \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\, du.$$

4.6 Idée numéro 6 : développer le sinus

On écrit $\sin\big(N + \dfrac{1}{2}\big)u = \cos Nu \sin\dfrac{u}{2} + \sin Nu \cos\dfrac{u}{2}$ et, à $\frac{1}{2\pi}$ près, Δ_N apparaît alors comme somme de deux intégrales :

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(x)) \cos Nu\, du \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(x)) \frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} \sin Nu\, du.$$

4.7 Idée numéro 7 : Riemann-Lebesgue

On voit la première intégrale comme un coefficient de Fourier de la fonction continue de u, $f(x-u) - f(x)$ et, en vertu de 3.4, elle tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Pour la seconde, l'argument est identique à condition de montrer la continuité de la fonction quotient. C'est la dernière idée.

4.8 Idée numéro 8 : la dérivée

La fonction $u \mapsto (f(x-u) - f(x))\dfrac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$ est évidemment continue sur $[-\pi, \pi]$ sauf peut-être en 0. Pour voir qu'elle l'est en 0, on écrit :

$$\frac{f(x-u) - f(x)}{\sin\frac{u}{2}} = \frac{f(x-u) - f(x)}{u} \times \frac{u}{\sin\frac{u}{2}}$$

et il s'agit de voir que les deux termes ont une limite quand u tend vers 0. Pour le premier, c'est le fait que f est de classe C^1, pour le second, c'est la limite de $\sin x/x$ en 0. On peut donc appliquer Riemann-Lebesgue au second terme et on achève ainsi la preuve de Dirichlet.

5 Applications

5.1 Calcul des coefficients pour les créneaux et les dents de scie

5.1.1 Le créneau

Rappelons qu'il s'agit de la fonction de période 2π, qui vaut 1 sur $[0,\pi]$ et 0 sur $]\pi, 2\pi[$.

Le calcul des coefficients de Fourier est facile (ne pas oublier le coefficient 2 pour les a_n, b_n avec $n > 0$). On trouve $a_0 = \dfrac{1}{2}$, $a_n = 0$ pour $n > 0$, $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \dfrac{2}{(2p+1)\pi}\cdot$

5.1 *Remarque.* La fonction créneau n'est ni paire ni impaire, mais en la translatant de $1/2$ ou $\pi/2$ vers le bas, on se ramène à une fonction impaire. C'est ce qui explique la nullité des a_n pour $n > 0$.

5.1.2 Dent de scie

Rappelons qu'il s'agit la fonction f, paire, périodique de période 2π, définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \pi - x$. Comme f est paire, ses coefficients de Fourier b_n sont nuls. On a $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot$ Pour $n \geq 1$, on a $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos nt\,dt = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt$. On calcule cette dernière intégrale par parties et on trouve $a_n = \dfrac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}$ pour $n \geq 1$. En distinguant selon la parité de n, on voit que les a_{2p} sont nuls pour $p \geq 1$ et qu'on a $a_{2p+1} = \dfrac{4}{\pi(2p+1)^2}$ pour $p \geq 0$.

5.2 Les valeurs de la fonction ζ en les entiers pairs

Les théorèmes de Dirichlet et de Parseval permettent de calculer de nombreuses sommes de séries, et notamment les sommes [11] $\zeta(2k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}\cdot$

11. En revanche on ne sait pas calculer les $\zeta(2k+1)$. Un résultat récent (1977) et non trivial dû à Apéry affirme que $\zeta(3)$ est irrationnel.

5.2.1 Avec le créneau

Le théorème de Dirichlet donne une infinité de formules (mais pas toutes intéressantes), pour $t \neq k\pi$:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)t.$$

Avec $t = \pi/2$ on retrouve la formule donnant $\pi/4 = \operatorname{Arctan} 1$:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Le théorème de Parseval donne une autre formule, avec un degré plus grand en dénominateur : $\|f\|_2^2 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)^2\pi^2}$, qui donne $\dfrac{\pi^2}{8} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$. Cette formule n'est pas tout à fait celle d'un $\zeta(s)$ mais on en déduit facilement $S = \zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ en notant qu'on a $S/4 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ et donc $S - S/4 = \pi^2/8$, qui donne la valeur bien connue $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5.2.2 Avec les dents de scie

Puisque f est continue et C^1 par morceaux, on a, en vertu du théorème de Dirichlet :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Si l'on applique cette formule pour $x = 0$, on trouve

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On peut en déduire la valeur de $\zeta(2)$ comme on l'a vu ci-dessus.

Si l'on applique la même formule en $x = \pi/4$, on trouve la formule $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\epsilon(p)}{(2p+1)^2} = \frac{\sqrt{2}\,\pi^2}{16}$ où $\epsilon(p)$ vaut 1 si p est congru à 0 ou 3 modulo 4 et -1 sinon.

La formule de Parseval donne $\|f\|_2^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\pi - t)^2 = \dfrac{\pi^2}{3} = \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sum_0^{+\infty} \dfrac{16}{\pi^2}\dfrac{1}{(2p+1)^4}$ et on en déduit $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^4} = \dfrac{\pi^4}{96}\cdot$ On peut se servir de cette formule pour calculer $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$ avec la même astuce que dans le cas du créneau.

5.2.3 Pour aller plus loin : régularité et convergence

On peut obtenir des valeurs de $\zeta(2k)$ avec k plus grand, mais il faut utiliser des fonctions plus régulières. La raison est dans le résultat suivant :

5.2 Lemme. *Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est continue, périodique de période T, et de classe C^1 par morceaux sur $[0, T]$, on a, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(f') = in\omega c_n(f)$.*

Démonstration. Le lecteur se convaincra que la formule d'intégration par parties est encore valable si l'on suppose seulement les fonctions de classe C^1 par morceaux. On a $c_n(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt$. On intègre par parties en posant $u = f(t)$, $dv = e^{-in\omega t}dt$, d'où $du = f'(t)dt$ et $v = \dfrac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}$ et donc

$$c_n(f) = \frac{-1}{in\omega T}\,[f(t)e^{-in\omega t}]_0^T + \frac{1}{in\omega T}\int_0^T f'(t)e^{-in\omega t}\,dt.$$

Comme f est de période T et continue, la partie tout intégrée est nulle et on a le résultat.

5.3 Corollaire. *On suppose toujours f périodique de période T.*

1) Si f est continue et de classe C^1 par morceaux, la série de terme général $c_n(f)$ converge absolument et la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.

2) Si f est de classe C^p il existe une constante M telle que l'on ait, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $|c_n(f)| \leq \dfrac{M}{n^p}\cdot$

Démonstration. 1) En vertu du lemme, on a, pour $n \neq 0$, $|c_n(f)| = \dfrac{|c_n(f')|}{n\omega}\cdot$ Mais, pour des séries à termes positifs, on a $2a_nb_n \leq a_n^2 + b_n^2$, de sorte que, comme les séries $1/n^2$ et $|c_n(f')|^2$ convergent (pour $c_n(f')$ c'est Bessel !), il en est de même de $\frac{|c_n(f')|}{n}$, donc de $|c_n(f)|$. Cela montre que la série de Fourier converge normalement, donc uniformément, et on sait que c'est vers f par Dirichlet.

2) Il suffit d'utiliser le lemme et de raisonner par récurrence sur p. La constante M est $\dfrac{1}{\omega^p} \sup\limits_{t\in[0,T]} |f^{(p)}(t)|$.

5.2.4 Le cas des fonctions polynomiales par morceaux

Dans ce cas, on peut préciser l'ordre de grandeur des coefficients de Fourier :

5.4 Proposition. *Soit f une fonction polynomiale par morceaux.*

1) Les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont des $O(1/n)$ (même si f n'est pas continue).

2) Si on suppose, de plus, que f est de classe C^r, $r \geq 0$, les $c_n(f)$ sont des $O(1/n^{r+2})$.

Démonstration. 1) On montre d'abord le lemme suivant :

5.5 Lemme. *Soit f une fonction polynomiale sur $[a,b]$. Alors, l'intégrale $\int_a^b f(t)e^{in\omega t}$ est un $O(1/n)$.*

Démonstration. (du lemme) On raisonne par récurrence sur le degré p de f. Pour $p = 0$ c'est évident et pour passer de p à $p+1$ on utilise une intégration par parties. On notera qu'à cause de la partie tout intégrée on ne peut pas améliorer le $1/n$.

2) On raisonne par récurrence sur r, à partir du point 1), en utilisant 5.2.

5.3 Un exercice

L'exercice suivant montre comment obtenir des valeurs de $\zeta(2k)$ avec $k = 2$ ou 4, en utilisant une fonction de classe C^2 polynomiale par morceaux[12].

Soient $a, b \in \mathbf{R}$. On pose, pour $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = x^4 + ax^2 + b$.

1) Déterminer a et b pour que l'on ait $P(\pi) = P'(\pi) = 0$.

On fixe $a = -2\pi^2$ et $b = \pi^4$ et on considère la fonction f, définie sur $\mathbf{R}$, paire, périodique de période 2π, qui est égale à P sur $[0, \pi]$.

2) Montrer que f est de classe C^2 et tracer rapidement son graphe. Qu'en déduit-on pour les coefficients de Fourier de f ?

3) Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_k = \int_0^\pi x^k \cos nx\, dx \quad \text{pour } k = 0, 2, 4 \quad \text{et} \quad J_k = \int_0^\pi x^k \sin nx\, dx \quad \text{pour } k = 1, 3.$$

12. Une question possible du jury : pourquoi ne pas utiliser une fonction vraiment polynomiale ?

4) Calculer les coefficients de Fourier a_n (pour $n \geq 0$) et b_n (pour $n \geq 1$) de f. *(Réponses : $b_n = 0$, $a_0 = \dfrac{8\pi^4}{15}$ et $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{48}{n^4}$.)*

5) Calculer les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8}.$$

6 Annexes

6.1 Annexe 1 : Dirichlet, le cas non continu

Lorsque f n'est pas continue en x, il faut modifier la preuve de Dirichlet donnée ci-dessus comme suit.

Rappelons qu'on a $S_N f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)K_N(u)\,du$. Comme K_N est paire, on en déduit, avec le changement de variable $u \mapsto -u$, $S_N f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (f(x-u)+f(x+u))K_N(u)\,du$ et il s'agit de majorer la différence Δ_N entre cette quantité et $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. On écrit cette différence comme précédemment en faisant apparaître le terme :

$$\frac{f(x-u) - f(x^-) + f(x+u) - f(x^+)}{\sin(u/2)}$$

et il suffit de montrer que ce terme a une limite finie quand u tend vers 0^+. Pour cela on peut remplacer le sinus par u et, comme f est de classe C^1 à gauche et à droite de x, les deux morceaux tendent respectivement vers $f'(x^-)$ et $f'(x^+)$.

6.2 Annexe 2 : Parseval, un cas particulier

Dans le cas où la fonction f est de classe C^1, la formule de Parseval résulte de ce qui précède. Le ressort de la preuve est le corollaire 5.3 qui assure que la série de Fourier de f converge uniformément vers f c'est-à-dire que la différence $\|S_N f - f\|_\infty$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini (rappelons que la norme de la convergence uniforme est donnée par $\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |g(t)|$). Or, on a vu en 3.2 la formule $\|f\|_2^2 = \|S_N f\|_2^2 + \|S_N f - f\|_2^2 = \displaystyle\sum_{-N}^{N} |c_n|^2 + \|S_N f - f\|_2^2$. La conclusion vient de l'inégalité évidente sur les normes : $\|g\|_2 \leq \|g\|_\infty$ qui montre que $\|S_N f - f\|_2^2$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

6.3 Annexe 3 : Convergence simple de la série de Fourier

Voici ce qu'on peut dire de la convergence simple de la série de Fourier d'une fonction périodique. Si f est une telle fonction, on peut calculer ses coefficients de Fourier dès qu'elle est intégrable (en particulier, si elle est continue par morceaux, ou de carré intégrable). Cela étant :

• Si f est seulement intégrable, il se peut que sa série de Fourier ne converge vers f en aucun point de $[0, T]$ (Kolmogorov, 1933).

• Si f est de carré intégrable (en particulier continue par morceaux), la série de Fourier de f converge vers f presque partout (Carleson, 1966, très difficile).

• Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas partout [13], par exemple la fonction de Du Bois Reymond (1873) définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left[\sin\left(2^{n^2+1}x\right) \sum_{k=1}^{2^{n^2}} \frac{\sin kx}{k} \right].$$

7 Utilisation de *xcas*

7.1 Rentrer les fonctions

Pour rentrer les fonctions définies par morceaux, *xcas* possède une commande `piecewise`. Par exemple, pour construire la la fonction dent de scie sur $[0, 2\pi]$, on définit :

$$f(x) := \texttt{piecewise}(x < \pi, \pi - x, x > \pi, x - \pi).$$

Bien entendu, cette fonction n'est pas périodique. Quand on a ainsi une fonction f définie sur $[0, T]$ que l'on souhaite transformer en une fonction g de période T égale à f sur $[0, T]$, on pose $g(x) = f\big(x - \left[\frac{x}{T}\right] T\big)$ (la partie entière étant définie par `floor`). En effet, si x est dans l'intervalle $[nT, (n+1)T]$, la partie entière de x/T est n et on calcule $g(x) = f(x - nT)$, ce qui rend bien g périodique.

Pour le créneau [14] on pose $cr(x) := \texttt{piecewise}(x < \pi, 1, x > \pi, 0)$ et on définit $cre(x)$ par la procédure ci-dessus.

13. Exercice !

14. On peut aussi utiliser la fonction `floor` (partie entière) et le test de parité `even` en posant $crenau(x) := \texttt{even}(\texttt{floor}(\texttt{x}/\pi))$, mais le graphe et les coefficients fonctionnent mal avec cette définition.

7.2 Construire les graphes

On utilise la commande `plotfunc(f(x),x)`. Normalement, le logiciel choisit une fenêtre pertinente, mais on peut la modifier, au besoin. Une utilisation très intéressante consiste à tracer sur le même graphe la fonction et le début de sa série de Fourier. Dans la figure 3 ci-dessous on a tracé la fonction dent de scie $g(x)$ et le début de sa série de Fourier $h(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos x + \frac{4}{9\pi}\cos 3x$. On voit que l'approximation est déjà excellente.

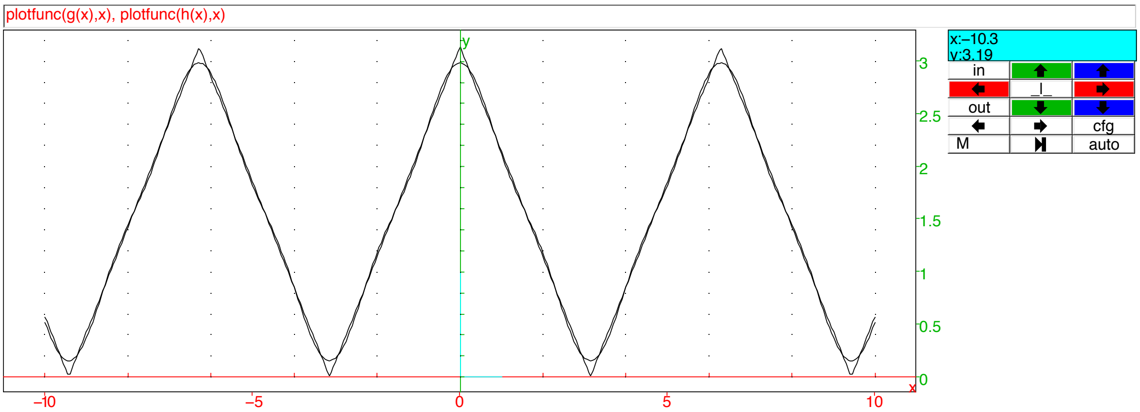

FIGURE 3 – La fonction dent de scie et le début de sa série de Fourier

7.3 Calculer les coefficients de Fourier

Le logiciel *xcas* sait calculer les coefficients de Fourier d'une fonction. Pour calculer le coefficient de Fourier a_n de la fonction g, de période T, la commande est la suivante : `simplify(fourier_an(g(x), x,T,n))`. Le logiciel renvoie un résultat qui peut être bizarre. Avec la fonction dent de scie, il donne :

$$\frac{2\times n\times\pi\times\cos(n\times\pi)\times\sin(n\times\pi)+2\times\cos(n\times\pi)^2-2\times\cos(n\times\pi)}{n^2\times\pi}$$

expression qui peut bien sûr être simplifiée (on a $\sin n\pi = 0$!). Ici, on a $a_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi}$ et on retrouve le résultat donné ci-dessus.

Signalons que *xcas* sait calculer les valeurs $\zeta(2n)$ pour n pas trop grand. Par exemple, pour calculer $\zeta(6)$ on tape `sum(1/n^6,n,1,infinity)` et on trouve $\pi^6/945$ en une fraction de seconde. On trouve de même $\zeta(20) = \dfrac{174611\pi^{20}}{1531329465290625}$ en 26 secondes.

8 Que faire le jour du CAPES ?

Comme on ne saurait raconter en quinze minutes tout ce qui précède, il faut faire des choix drastiques. Je propose d'utiliser en fil rouge de l'exposé un exemple, disons celui de la fonction dent de scie [15] $f(t)$, avec le plan suivant.

1) On reprend l'introduction avec le circuit RLC et l'équation différentielle, avec $f(t)$ comme second membre et on présente tout de suite la figure *xcas* ci-dessus, qui montre que l'approximation avec $S_3 f$ est déjà excellente.

2) On introduit les coefficients de Fourier (comme produits scalaires) et on donne les valeurs de ceux de f.

3) On énonce Dirichlet avec l'application à $\zeta(2)$ (en utilisant f).

4) On énonce Parseval (et peut-être la proposition préliminaire 3.2) avec l'application à $\zeta(4)$ (en utilisant f).

Si le jury le demande, il faut être capable de développer certains points, notamment 1.4, 2.1, 3.2 et ses corollaires, 5.2 et son corollaire (si on a abordé ces points).

En revanche, rassurez-vous, le jury ne peut pas décemment demander la preuve de Dirichlet, ni celle de Parseval, mais le candidat doit bien préciser qu'il admet ces théorèmes, conformément aux programmes de BTS. Cela étant, tout point que le candidat sera capable d'établir dans la direction de ces résultats (par exemple Parseval dans le cas C^1) sera évidemment un plus.

15. On peut aussi utiliser le créneau, évidemment. Dans ce cas, on peut montrer le phénomène de Gibbs : la convergence est bonne en les points de continuité de f, mais, en les discontinuités elle accuse les écarts : la différence entre maximum et minimum des $S_N f$ tend vers une limite plus grande que le saut de la fonction, voir figure ci-dessous.

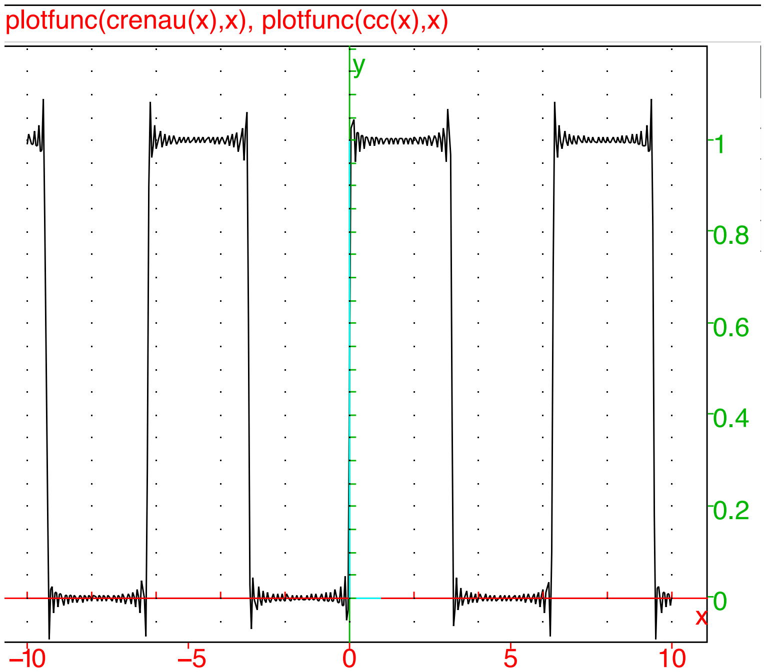

FIGURE 4 – Le phénomène de Gibbs sur le créneau