À propos de l'équation

$$(*) \qquad f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(y)$$

Daniel PERRIN

Il s'agit de résoudre l'équation fonctionnelle ci-dessus sous diverses hypothèses. Pour l'instant on ne précise ni ces hypothèses, ni même le domaine de définition D de f. On suppose seulement qu'elle vérifie $(*)$ pour tous les $x, y \in D$.

1 L'astuce fondamentale

Si on applique la formule avec $x = y = 1$ (en supposant $1 \in D$), on trouve $f(1)^2 = -f(1)$ donc $f(1) = 0$ ou -1. Mais, on a $f(x) = f(x)f(1) + f(x) + xf(1)$, de sorte que si on est dans le cas $f(1) = -1$, on $f(x) = -x$ pour tout x. On voit donc apparaître la fonction $x \mapsto -x$ et on vérifie qu'effectivement c'est une solution de l'équation, définie sur tout $\mathbf{R}$. Dès lors, il est assez naturel de comparer f à cette solution en posant, pour tout $x \in D$, $g(x) = f(x) - (-x) = f(x) + x$. La remarque fondamentale est la suivante :

1.1 Lemme. *Si f vérifie $(*)$ sur D, g vérifie l'équation $(**)$: $g(xy) = g(x)g(y)$ pour tous $x, y \in D$.*

On est cette fois en pays de connaissance car on a le résultat classique :

1.2 Proposition. *Soit $g : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$ une fonction vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbf{R}^{+*}$, $g(xy) = g(x)g(y)$. On suppose, soit que g est monotone, soit qu'elle est continue en un point. Alors ou bien g est identiquement nulle, ou bien il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait, pour tout $x > 0$, $g(x) = x^\alpha$.*

Démonstration. Rappelons brièvement cette démonstration classique. On a $g(1) = g(1)^2$, donc $g(1)$ est égal à 0 ou 1. Si $g(1)$ est nul, la formule $g(x) = g(x)g(1)$ montre que g est identiquement nulle. Sinon, on a $g(1) = 1$ et la fonction g ne s'annule pas. En effet, si on a $g(x_0) = 0$, g est identiquement nulle en vertu de la formule $g(x) = g(x_0)g(x/x_0)$. Il en résulte que g est strictement positive en vertu de l'égalité $g(x) = g(\sqrt{x}\,)^2$. On pose alors, pour x réel, $h(x) = \ln(g(\exp(x)))$ et $\alpha = h(1)$. On a $h(x+y) = h(x) + h(y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$. On en déduit $h(0) = 0$. On montre par récurrence qu'on a $h(n) = \alpha n$ pour $n \in \mathbf{N}$. On montre ensuite qu'on a la même égalité pour $n \in \mathbf{Z}$, puis qu'on a $h(x) = \alpha x$ pour $x \in \mathbf{Q}$. Pour cela on utilise la relation $p = \dfrac{p}{q} + \dfrac{p}{q} + \cdots + \dfrac{p}{q}$ (q fois). Comme h est continue en un point (donc partout à cause de la relation fonctionnelle) ou monotone (comme composée de telles fonctions), on en déduit qu'on a $h(x) = \alpha x$ pour $x \in \mathbf{R}$ et le résultat s'ensuit.

1.3 *Remarques.*
1) Il est clair que g est décroissante pour $\alpha < 0$, constante et égale à 1 pour $\alpha = 0$ et croissante pour $\alpha > 0$.
2) Si g est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier, on a $g(0) = 0$ ou 1. Si $g(0)$ est égal à 1, la formule $g(0) = g(0)g(x)$ montre que g est constante et égale à 1. Sinon, on examine le cas de -1. On a $g((-1)^2) = g(1) = (g(-1))^2 = 1$, d'où $g(-1) = \epsilon = \pm 1$. On en déduit, pour $x > 0$, $g(-x) = \epsilon g(x)$. On vérifie effectivement que, si on se donne g sur $\mathbf{R}^{+*}$ vérifiant $(**)$, elle admet deux prolongements à $\mathbf{R}$ tout entier vérifiant encore cette équation, l'un fournissant une fonction paire, l'autre une fonction impaire. Fort de cette constatation nous nous limiterons au cas des fonctions définies sur $\mathbf{R}^{+*}$ dans ce qui suit.

2 Un complément sur l'équation $(**)$

Il s'agit de montrer le théorème suivant :

2.1 Théorème. *Soit g une fonction non nulle définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ et vérifiant $(**)$. On suppose que f est monotone sur un segment $[a, b]$ avec $0 < a < b$. Alors g est monotone.*

Démonstration. On peut supposer g croissante (sinon on considère $1/g$). Notons que si g est croissante sur $[a, b]$ elle l'est aussi sur $[1/a, 1/b]$ en vertu de la formule $g(1) = 1 = g(x)g(1/x)$. On peut donc supposer $a \geq 1$, quitte à remplacer $[a, b]$ par $[a', 1/a]$ avec $a' = \mathrm{Max}\,(1, 1/b)$. De plus, il suffit de montrer que g est croissante sur $[1, +\infty[$. On peut enfin supposer que g est strictement croissante sur $[a, b]$. Sinon, elle serait constante sur un intervalle ouvert non vide, donc continue en les points de cet intervalle et la proposition 1.2 permettrait de conclure.

On note d'abord le lemme suivant :

2.2 Lemme. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $x > 0$. Alors, on a $g(x^n) = g(x)^n$.*

Démonstration. Cela résulte de $(**)$ par récurrence sur n.

2.3 Corollaire. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction g est strictement croissante sur $[a^n, b^n]$.*

Démonstration. Soient x, y avec $a^n \leq x < y \leq b^n$. On peut écrire $x = u^n$ et $y = v^n$, avec $u, v > 0$ et on a alors $a \leq u < v \leq b$, donc $g(u) < g(v)$ et, par 2.2, $g(x) = g(u^n) = g(u)^n < g(v)^n = g(v^n) = g(y)$.

On note alors que l'on a, pour $n \geq N$, $a^{n+1} \leq b^n$, c'est-à-dire que les intervalles se chevauchent. En effet, c'est vrai dès qu'on a $\left(\frac{b}{a}\right)^n \geq a$, ce qui, comme b/a est > 1, est vrai pour n assez grand. Il en résulte que la réunion des intervalles $[a^n, b^n]$ pour $n \geq N$ est égale à $I = [a^N, +\infty[$ et que la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.

2.4 Lemme. *Soit λ un nombre > 1. On a $g(\lambda) > 1$.*

Démonstration. Sinon, on a $g(\lambda) \leq 1$, donc $g(\lambda^{n+1}) = g(\lambda^n)g(\lambda) \leq g(\lambda^n)$. Mais, comme λ est > 1, λ^n et λ^{n+1} sont dans I pour n assez grand et vérifient $\lambda^n < \lambda^{n+1}$, ce qui contredit le fait que g est strictement croissante sur I.

On peut alors finir de prouver le théorème. Soient x, y des réels vérifiant $1 \leq x < y$. On a $g(y) = g(x)g(y/x) > g(x)$ en vertu de 2.4.

3 Retour à l'équation $(*)$

On dispose de solutions de l'équation $(*)$ sur $\mathbf{R}^{+*}$ avec les fonctions $f(x) = -x$ et $f(x) = x^\alpha - x$ pour $\alpha \in \mathbf{R}$. La question est de savoir s'il n'y en a pas d'autres. Le résultat est le suivant :

3.1 Théorème. *Soit $f : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$ une fonction vérifiant la relation $(*)$ pour tous les $x, y > 0$. On suppose soit qu'elle est continue en un point, soit qu'il existe un intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < b$ sur lequel f est monotone. Alors, si la fonction f n'est pas égale à $-x$, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^\alpha - x$.*

3.2 *Remarque.* Attention, la fonction f n'est pas nécessairement monotone sur $\mathbf{R}^{+*}$ tout entier. C'est le cas si α est ≤ 0, car on vérifie que f est décroissante, mais, si α est > 0, f n'est pas monotone (si α est < 1 f est croissante puis décroissante et si α est > 1 c'est l'inverse). On notera qu'une fonction f vérifiant $(*)$ et non constante n'est jamais croissante.

Démonstration. Le cas f continue en un point se ramène aussitôt au cas g continue en un point. De même, si f est croissante sur $[a, b]$, il est clair que g l'est aussi et on conclut par 2.1. Il reste donc seulement à traiter le cas où f est décroissante sur $[a, b]$. On va montrer qu'alors g est monotone[1] sur un intervalle non vide.

On note E l'image de l'ensemble $\mathbf{Q}$ des rationnels par l'exponentielle : $E = \exp(\mathbf{Q})$. Cet ensemble est partout dense dans $\mathbf{R}^{+*}$. On a le lemme suivant :

3.3 Lemme. *Soit $g : \mathbf{R}^{+*} \to \mathbf{R}$ une fonction vérifiant $g(xy) = g(x)g(y)$ et $g(1) = 1$. Alors, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait : $\forall x \in E,\ g(x) = x^\alpha$. La fonction g est monotone sur E.*

Démonstration. C'est le début de la preuve de la proposition 1.2. On pose, pour $x > 0$, $h(x) = \ln(g(\exp(x)))$ et $\alpha = h(1)$. On montre qu'on a $h(x) = \alpha x$ pour $x \in \mathbf{Q}$. On en déduit aussitôt le résultat.

Revenons au théorème. Il y a deux cas de figure selon que $g|_E$ est croissante ou décroissante.

• Le cas $g|_E$ décroissante. On montre que g décroît sur $[a, b]$ (au sens large). Sinon, il existe x, y avec $a \leq x < y \leq b$ et $g(x) < g(y)$, soit $f(x)+x < f(y) + y$. Comme E est dense dans $\mathbf{R}$ on peut trouver $z, t \in E$ avec $x < z < t < y$ avec z et t arbitrairement voisins de x et y respectivement. Comme g est décroissante sur E on a $g(z) > g(t)$, soit encore $f(z) + z > f(t) + t$. On fait tendre z vers x et t vers y. Comme f est décroissante, $f(z)$ a une limite l avec $l \leq f(x)$ et $f(t)$ une limite d avec $d \geq f(y)$. On a, à la limite, $f(x) + x \geq l + x \geq d + y \geq f(y) + y$, ce qui est absurde.

• Le cas $g|_E$ croissante. On montre que g croît (au sens large) sur $]a, b[$. Sinon, il existe x, y avec $a < x < y < b$ et $g(x) > g(y)$, soit $f(x)+x > f(y)+y$. Toujours par la densité de E, on trouve $z, t \in E$, arbitrairement voisins de x, y, avec $a < z < x < y < t < b$. Comme $g|_E$ est croissante, on a $g(z) < g(t)$, soit $f(z)+z < f(t)+t$. Comme f est décroissante, $f(z)$ a une limite l quand z tend vers x, avec $l \geq f(x)$ et, de même, $f(t)$ a une limite d quand t tend vers y avec $f(y) \geq d$. À la limite on a $f(x) + x \leq l + x \leq d + y \leq f(y) + y$ et c'est absurde.

Dans tous les cas, g est monotone sur un intervalle non vide et on conclut par 2.1.

[1]Mais les deux cas sont possibles, comme on l'a vu en 3.2.