Un corrigé du dossier 55

Daniel PERRIN

Introduction

Je donne – exceptionnellement – un corrigé du dossier[1] 55 sur le thème fonctions de référence : $f+\lambda$, λf, etc. La raison de cette exception est que la correction orale de ce dossier a été bien peu convaincante, à la fois dans le groupe 2 et dans le groupe 1 et que, dans les deux cas, je porte une bonne part de responsabilité dans cet échec, dans le groupe 2 à cause de la mauvaise rédaction du dossier proposé, dans le groupe 1 à cause de la mauvaise gestion du temps d'oral.

1 Analyse de l'exercice du jury

Comme on me l'a fait remarquer, la question 2) de l'exercice du jury n'est pas claire et le mot "comparer" peut être interprété comme : *Étudier le signe de* $f_3 - f_1$, par exemple. Je propose donc une nouvelle rédaction :

2) Par quelle transformation (ou suite de transformations) passe-t-on de la courbe $\mathcal{C}_1$ *à la courbe représentative de* $f_3(x) = \dfrac{x+3}{x+2}\cdot$ *Même question pour passer de* $\mathcal{C}_2$ *à la courbe représentative de* $f_4(x) = \dfrac{x-3}{x+2}\cdot$ *Montrer que toutes ces courbes ont un centre de symétrie et deux asymptotes.*

1.1 L'objectif de l'exercice

Il est conforme aux programmes de première S. Il s'agit du paragraphe **Généralité sur les fonctions** dont je cite un extrait :

Sens de variation et représentation graphique d'une fonction de la forme $u+\lambda$, λu, *la fonction* u *étant connue.*

La colonne **Modalités de mise en œuvre** précise : *On travaillera, à l'aide de grapheurs, sur des familles de courbes représentatives de fonctions associées à deux fonctions données* u *et* v : $u+\lambda$, λu, $u+v$, $|u|$, $x \mapsto u(\lambda x)$ *et* $x \mapsto u(x+\lambda)$.

Je résumerai donc l'objectif principal de l'exercice ainsi :

Montrer comment des transformations effectuées sur les fonctions (celles citées ci-dessus), se traduisent géométriquement en des transformations de leurs graphes.

Dans le cas présent, il s'agit de fonctions homographiques que l'on va comparer aux fonctions de référence définies par $f_1(x) = 1/x$ ou $f_2(x) = -1/x$.

Un objectif secondaire de l'exercice est une première approche de la notion de courbes tangentes (question 3).

[1] Voir en annexe le texte du dossier.

1.2 Un mot sur la résolution de l'exercice

1.2.1 La question 2

Dans la question 2) le premier point technique à enseigner aux élèves est de "faire apparaître le dénominateur au numérateur". On peut noter que c'est possible pour n'importe quelle homographie non affine : $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$, que l'on écrit :

$$f(x) = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + \frac{bc-ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{x+\frac{d}{c}}.$$

On voit que l'on passe de la fonction f_1 à la fonction f *via* trois étapes : $g_1(x) = f_1(x+\alpha)$, avec $\alpha = \frac{d}{c}$, $g_2(x) = \beta g_1(x)$, avec $\beta = \frac{bc-ad}{c^2}$ et enfin $f(x) = \gamma + g_2(x)$ avec $\gamma = \frac{a}{c}$.

Il s'agit bien des manipulations figurant au programme de première S. On notera que lorsque $ad - bc$ est nul, la fonction est constante et on retrouvera ce cas un peu plus loin.

Dans l'exercice du jury, la décomposition de f_3 était : $f_3(x) = 1 + \dfrac{1}{x+2}$ et celle de f_4 : $f_4(x) = 1 + 5 \times \dfrac{-1}{x+2}$ (ici c'est f_2 que l'on met en évidence).

Dans un cas comme dans l'autre, la méthode que je propose pour identifier la transformation sur les graphes est la même et elle consiste à faire un changement de repère.

Faisons d'abord le cas de f_3. On a la courbe $\mathcal{C}_3$ d'équation $y = f_3(x) = 1 + \dfrac{1}{x+2}$, que l'on veut comparer à $\mathcal{C}_1$ définie par $Y = 1/X$. On fait donc apparaître la fonction inverse f_1 dans l'expression de f_3 en posant $X = x+2$ et $y = Y+1$ ou $Y = y-1$. La transformation qui nous intéresse est celle qui passe de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_3$ et qui est donc donnée par $x = X-2$ et $y = Y+1$. On reconnaît qu'il s'agit d'une translation de vecteur $-2\vec{i} + \vec{j}$. On peut noter que, par rapport à la transformation opérée sur les fonctions, on fait la même chose[2] sur y, mais l'inverse sur x.

Pour le cas de f_4, on fait apparaître $Y = -1/X$ en posant $X = x+2$ et on a alors $y = 1+5Y$, soit $Y = \dfrac{y-1}{5}\cdot$ Dans le sens intéressant on a donc $x = X-2$ et $y = 1+5Y$. La transformation qui intervient ici n'est pas une transformation connue des élèves. On va la décomposer en trois transformations : $(X,Y) \mapsto (X-2,Y)$ puis $(X-2,Y) \mapsto (X-2,5Y)$ et enfin $(X-2,5Y) \mapsto (X-2,1+5Y)$. La première et la troisième transformations sont des translations de vecteurs respectifs $-2\vec{i}$ et $\vec{j}$. La deuxième transformation est une affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport 5. Les affinités (ou dilatations) ne sont plus connues au lycée, mais on peut comprendre une telle opération comme un changement d'échelle **sur un seul axe**. Voir quelques rappels en annexe.

[2]C'est un phénomène général. Si on a $f : D \to \mathbf{R}$ et $k = g \circ f \circ h$, où g et h sont des bijections de $\mathbf{R}$, la fonction k est définie sur $h^{-1}(D)$ et on passe du graphe de f à celui de k par la transformation $(x,y) \mapsto (h^{-1}(x), g(y))$. Par rapport à l'opération sur les fonctions, on note que la transformation sur les graphes va "dans le même sens sur les y, mais en sens inverse sur les x".

1.2.2 La question 3

Il s'agit de résoudre l'équation en x :

$$(*) \qquad f_5(x) = \frac{x+1}{x-1} = f_6(x) = \frac{3x+b}{2x-4}$$

où b est un paramètre réel. On doit supposer $x \neq 1, 2$ pour que les fonctions soient définies (quoique ...). Si x est solution de $(*)$ il vérifie :

$$(**) \qquad x^2 + (b-1)x + 4 - b = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = b^2 + 2b - 15 = (b-3)(b+5)$. On voit donc que l'équation $(**)$ n'a pas de solution pour $-5 < b < 3$, qu'elle en a une seule pour $b = -5$ ou $b = 3$ et qu'elle en a deux pour $b < -5$ ou $b = 3$.

Attention, il y a une petite difficulté pour revenir à $(*)$, à cause de la condition $x \neq 1, 2$. Même si 1 ou 2 est solution de $(**)$ il doit être écarté pour $(*)$. On vérifie que 1 ne peut pas être solution de $(**)$. En revanche, 2 est solution de $(**)$ pour $b = -6$ et il faut traiter ce cas à part.

• *Le cas* $b = -6$

Dans ce cas, la fonction f_6 est constante et égale à $3/2$. C'est le cas $ad - bc = 0$ vu plus haut dans le cas d'une homographie générale. On note que dans ce cas, il n'y a plus de raison d'interdire la valeur $x = 2$. On cherche donc l'intersection de $\mathcal{C}_5$ avec la droite $y = 3/2$, il y a une seule solution[3] $(5, 3/2)$.

• *Le cas* $b = -5$

Le tracé des courbes sur la calculatrice montre qu'elles sont tangentes, ce qui signifie qu'en leur unique point d'intersection elles ont même tangente. En effet, ici, le point d'intersection est $N = (3, 2)$ et la pente de la tangente à $\mathcal{C}_5$ comme à $\mathcal{C}_6$ est $-1/2$, voir Figure 4.

• *Le cas* $b = 3$

Là encore, on vérifie qu'en leur unique point d'intersection $(-1, 0)$, les courbes sont tangentes. On note d'ailleurs que la pente de la tangente commune est $-1/2$ comme dans le cas précédent, voir Figure 4. Ce phénomène sera expliqué au paragraphe suivant.

Bilan de la question 3

• Si on a $-5 < b < 3$, les courbes $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_6$ n'ont aucun point d'intersection.

• Si on a $b < -5$ et $b \neq -6$, ou $b > 3$, les courbes ont deux points d'intersection[4].

• Si on a $b = -5$ ou $b = 3$ les courbes ont un unique point d'intersection en lequel elles sont tangentes. Si on a $b = -6$ la courbe $\mathcal{C}_6$ est une droite et elle coupe $\mathcal{C}_5$ en un unique point.

---

[3] L'intersection d'une droite et d'une hyperbole est formée de $0, 1$ ou 2 points. L'intersection est réduite à un point dans deux cas : lorsque la droite est tangente à l'hyperbole ou lorsqu'elle est parallèle à l'une des asymptotes. Dans ce cas, l'un des points d'intersection est "à l'infini".

[4] Il peut être intéressant de noter que, dans ce cas, les courbes sont "transverses" en chacun de leurs points d'intersection, c'est-à-dire que leurs tangentes sont distinctes. On peut se contenter de le voir sur la calculatrice ou, si l'on veut faire le calcul, de choisir un cas où il est facile, par exemple $b = 4$.

2 D'autres exercices possibles

Il y a de nombreuses possibilités. J'en cite trois.

2.1 Reconnaître les graphes

Voir par exemple Déclic Première S, exercice 61. On a plusieurs fonctions obtenues à partir d'une fonction f par les opérations envisagées ci-dessus. On donne les graphes de ces fonctions et il s'agit d'associer chaque fonction à un graphe.

2.2 Tableaux de variation

Voici un exemple :

On considère une fonction f dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	1	2	0	-2	-1

et les fonctions définies par $f_1(x) = 2f(x) - 1$, $f_2(x) = -f(x)$, $f_3(x) = |f(x)|$, $f_4(x) = |f(2x-3)|$, $f_5(x) = f(-\frac{x}{2})$.

1) Proposer un graphe possible pour f.

2) Préciser le tableau de variation des fonctions f_i et les graphes de ces fonctions déduits du graphe proposé pour f.

2.3 Sur un oscilloscope

Voici une proposition :

Les courbes que l'on voit se dessiner sur les oscilloscopes ont des équations de la forme $(*)$: $y = a\sin(\omega t + \varphi)$ (a est l'amplitude, ω la pulsation et φ le déphasage).

1) Par quelle suite de transformations passe-t-on du graphe de la fonction sinus à la courbe d'équation $(*)$ ci-dessus ?

2) On donne, sur la calculatrice TI Voyage 200, la courbe suivante et on suppose que son équation est de la forme $(*)$.

Déterminer a, ω et φ en utilisant l'outil F5 Math *de la calculatrice.*

On commence par demander le maximum de la fonction qui est égal à a : on obtient $a = 2,5$. On cherche ensuite la valeur en 0 on trouve $a\sin\varphi = -1,767767$. Cela donne $\sin\varphi \sim -0,7071068$ et on ne manque pas de remarquer qu'il s'agit d'une valeur approchée de $-\sqrt{2}/2 = \sin(-\pi/4)$, d'où $\varphi = -\pi/4$. On cherche enfin le plus petit zéro positif : $0,26179939$ qui est égal à $\dfrac{\pi}{4\omega}$ et on obtient $\omega = 2,99999997478$ dont on pense bien qu'il s'agit de 3, en vérité. On a donc trouvé $y = (2.5)\sin(3t - \pi/4)$.

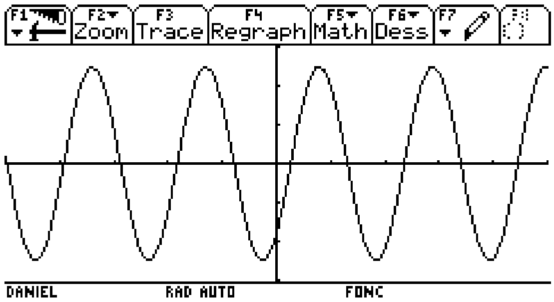

FIG. 1 – La calculatrice qui joue à l'oscilloscope

3 Annexe : une propriété des tangentes à l'hyperbole

Dans ce complément, destiné aux élèves de CAPES, pas aux lycéens, il s'agit d'expliquer la propriété aperçue[5] dans la question 3) de l'exercice du jury, à savoir que les tangentes communes à $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_6$ pour les valeurs du paramètre $b = -5$ et $b = 3$ sont parallèles.

3.1 Tangentes et asymptotes

La propriété suivante est valable pour toute hyperbole, mais on se peut contenter de traiter le cas équilatère (c'est-à-dire le cas où les asymptotes sont perpendiculaires) :

3.1 Proposition. *Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole, M un point de $\mathcal{H}$. On suppose que la tangente à $\mathcal{H}$ en M coupe les asymptotes en A et B. Alors, M est milieu de A, B.*

Démonstration. Le plus simple est de choisir un repère porté par les asymptotes de $\mathcal{H}$. Dans ce repère, l'hyperbole a pour équation $y = 1/x$. Si M est le point de coordonnées (a, b) avec $b = 1/a$, on calcule l'équation de la tangente : $y - b = \dfrac{-1}{a^2}(x - a)$ et ses intersections avec les asymptotes (i.e. les axes) : $A = (2a, 0)$, $B = (0, 2b)$ et on a le résultat.

3.2 Corollaire. *Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole, O son centre (qui est l'intersection des asymptotes), M un point de $\mathcal{H}$ et T la tangente en M. Alors, T est symétrique de (OM) par rapport aux directions des asymptotes.*

Démonstration. Supposons l'hyperbole équilatère pour simplifier, voir Figure 2. Dans le triangle rectangle OAB on a $MA = MB = MO$, de sorte que les triangles OMB et OMA sont isocèles en M. Ils sont donc symétriques par rapport à leurs hauteurs-médiatrices issues de M qui sont les parallèles aux côtés de l'angle droit de OAB (donc aux asymptotes).

[5] Faire des mathématiques c'est avant tout se poser des questions.

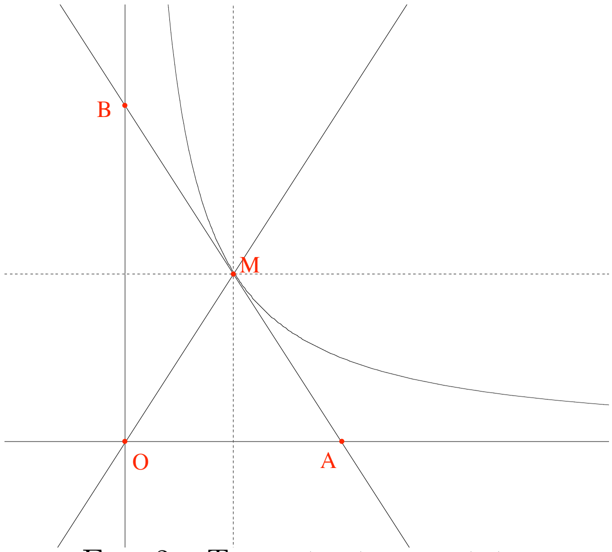

FIG. 2 – Tangente et asymptotes

3.2 Deux hyperboles tangentes

3.3 Corollaire. *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux hyperboles de centres respectifs O et O'. On suppose que les hyperboles sont tangentes en M et qu'elles ont mêmes directions asymptotiques. Alors les points O, O', M sont alignés.*

Démonstration. En effet, les droites (OM) et $O'M)$ sont toutes deux symétriques de la tangente commune T par rapport aux directions asymptotiques, donc elles sont égales.

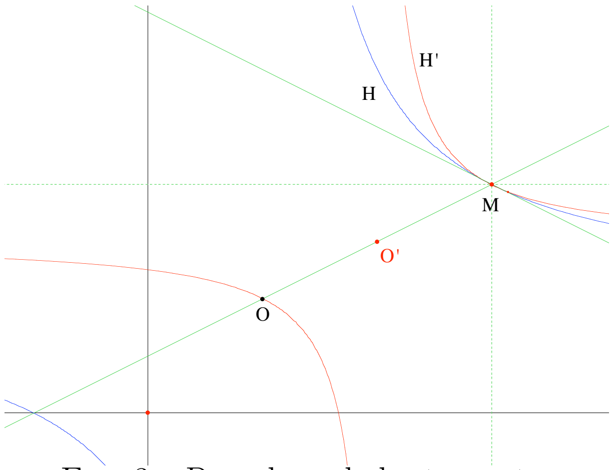

FIG. 3 – Deux hyperboles tangentes

3.3 Deux fois deux hyperboles tangentes

3.4 Proposition. *Soient $\mathcal{H}, \mathcal{H}', \mathcal{H}''$ trois hyperboles. On suppose que toutes ont mêmes directions asymptotiques (par exemple les axes de coordonnées), que $\mathcal{H}$ est de centre O et que $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ ont même centre O'. Alors, si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont tangentes en M et $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}''$ tangentes en N, les tangentes communes en ces points sont parallèles.*

Démonstration. En effet, on a vu que O, O', M, N sont alignés et que les tangentes communes sont les symétriques de cette droite par rapport aux directions des asymptotes.

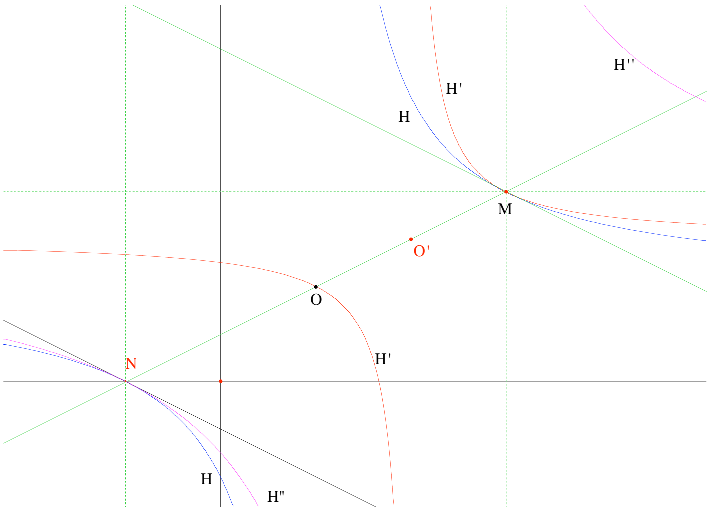

FIG. 4 – Deux hyperboles tangentes à une même troisième

3.5 *Remarque.* On notera que la situation de 3.4 est réalisée dans la question 3) de l'exercice. En effet, les hyperboles $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_6$ ont toutes pour directions asymptotiques les axes de coordonnées. De plus, les hyperboles $\mathcal{C}_6$ ont toutes mêmes asymptotes et donc même centre. En effet, les asymptotes sont données par le pôle $x = 2$ et la limite quand x tend vers $+\infty$, $y = 3/2$.

4 Annexe : les affinités

Ce paragraphe contient un bref résumé de ce qu'un étudiant de CAPES peut (doit ?) savoir à ce sujet.

4.1 Définition

La définition mathématique d'une affinité est la suivante :

4.1 Proposition-Définition. *On appelle* **affinité** *du plan affine une transformation affine f possédant un point fixe O et dont l'application linéaire $\vec{f}$ associée est une dilatation, c'est-à-dire une application qui admet les deux valeurs propres distinctes 1 et $\lambda \in \mathbf{R}$, avec deux droites propres $\vec{V}$ et $\vec{W}$. La droite D contenant O et dirigée par $\vec{V}$ est fixe par f, les droites de direction $\vec{W}$ sont invariantes par f. On dit que f est l'affinité d'axe D, de direction $\vec{W}$ et de rapport λ. Lorsque le plan est muni d'une structure euclidienne, on dit que l'affinité est orthogonale lorsque $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont orthogonaux. Dans un repère $O, \vec{i}, \vec{j}$ formé d'un point de D et de vecteurs $\vec{i} \in \vec{V}$ et $\vec{j} \in \vec{W}$, on a $f(x, y) = (x, \lambda y)$.*

L'affinité n'est plus au programme de lycée depuis bien longtemps et il n'est pas question de donner cette définition aux élèves. On peut toutefois leur expliquer de quoi il s'agit de deux manières.

4.2 L'aspect analytique

Pour les besoins du thème étudié ci-dessus il nous suffit d'étudier les affinités, essentiellement orthogonales, d'axes Ox ou Oy, c'est à dire les transformations :

$$(x,y) \mapsto (x, \lambda y) \qquad \text{ou} \qquad (x,y) \mapsto (\lambda x, y).$$

L'un des points importants est de distinguer ces applications des homothéties. On peut ensuite envisager de montrer analytiquement que l'image d'une droite est une droite. Le calcul est facile. Faisons-le par exemple dans le cas d'une affinité d'axe Ox. Si le point $M = (x,y)$ décrit la droite Δ d'équation $y = ax + b$, le point image $M' = (X,Y) = (x, \lambda y)$ vérifie $Y/\lambda = aX + b$ soit $Y = \lambda X + \lambda b$. Il s'agit de l'équation d'une droite Δ' et l'intersection des droites Δ et Δ' est le point $(-b/a, 0)$ de l'axe.

4.3 L'aspect géométrique

4.2 Définition. *Soit D une droite et λ un réel différent de 1. On définit l'affinité orthogonale d'axe D et de rapport λ comme l'application du plan dans lui-même qui à M associe M' vérifiant $\overrightarrow{HM'} = \lambda \overrightarrow{HM}$ où H est la projection orthogonale de M sur D.*

La proposition suivante résume l'essentiel des propriétés des affinités :

4.3 Proposition. *Soit f une affinité orthogonale d'axe D et de rapport λ.*
1) Dans un repère orthogonal $O, \vec{i}, \vec{j}$, avec $O \in D$ et $\vec{i}$ porté par D, on a $f(x,y) = (x, \lambda y)$.
2) La droite D est fixe par f. Les droites orthogonales à D sont invariantes par f.
3) L'image par f d'une droite Δ est une droite Δ'. Si Δ coupe D en K (resp. est parallèle à D) il en est de même de Δ'.

Démonstration. Seul le point 3) mérite attention. Supposons que Δ coupe D en K et soit dirigée par $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$. Soit M un point de Δ. On a $\overrightarrow{KM} = t\vec{u} = t\alpha\vec{i} + t\beta\vec{j}$. Si H est le projeté orthogonal de M sur D on a donc $\overrightarrow{KH} = t\alpha\vec{i}$ et $\overrightarrow{HM} = t\beta\vec{j}$. Par définition de l'affinité, le point M' image de M est donné par $\overrightarrow{HM'} = \lambda\overrightarrow{HM} = \lambda t\beta\vec{j}$. On en déduit $\overrightarrow{KM'} = t\vec{u'}$ avec $\vec{u'} = \alpha\vec{i} + \lambda\beta\vec{j}$, de sorte que M' décrit la droite passant par K et dirigée par $\vec{u'}$.

4.4 Une application : les tangentes à l'ellipse

Soit E l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec a, b des réels positifs. Soit C le cercle d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$. Il est clair que E est l'image de C par l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport b/a. Cela donne une construction des points et des tangentes de l'ellipse. On part des axes de coordonnées sur lesquels on porte les points A, B du cercle et le point B' de l'ellipse. L'ellipse est image du cercle par l'affinité orthogonale d'axe Ox qui envoie B sur B'. Si on prend un point M de C on construit son image $M' \in E$ par l'affinité : la droite (BM) coupe Ox en P et le point M' est intersection de (PB') et

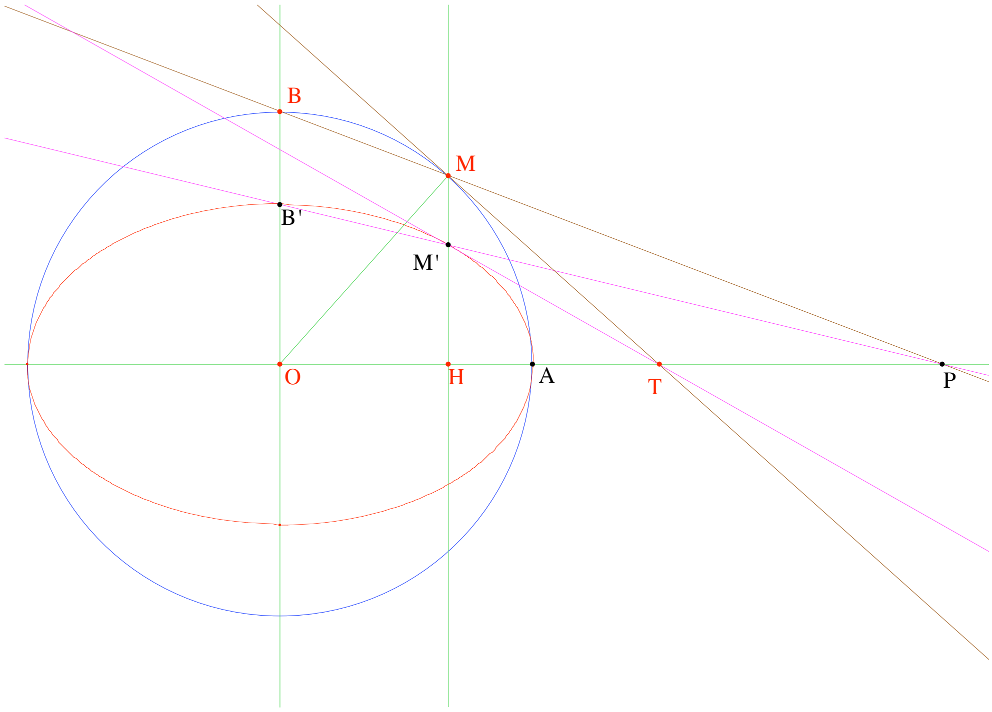

FIG. 5 – Tangente à l'ellipse

de la perpendiculaire à Ox passant par M. De même on obtient la tangente en M' à partir de la tangente en M : elles se coupent en T sur l'axe des x. (On utilise ici le fait qu'une droite est tangente à une ellipse si et seulement si elle la coupe en un unique point. Attention, ce critère n'est pas tout à fait vrai pour une hyperbole, il faut supposer que la droite n'est pas parallèle aux asymptotes.)

5 Annexe : le dossier 55, fonctions de référence et fonctions associées : $f + \lambda$, λf, etc

5.1 Exercice proposé

1) Tracer dans un repère orthonormé les courbes représentatives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ des fonctions $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f_2(x) = \dfrac{-1}{x}$.

2) Comparer la courbe $\mathcal{C}_1$ et la courbe représentative de $f_3(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$. Même question pour $\mathcal{C}_2$ et la courbe représentative de $f_4(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$. Montrer que toutes ces courbes ont un centre de symétrie et deux asymptotes.

3) On considère les fonctions $f_5(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $f_6(x) = \dfrac{3x+b}{2x-4}$ où b est un paramètre réel. Discuter le nombre de points d'intersection des courbes représentatives $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_6$. Que se passe-t-il lorsque les courbes n'ont qu'un point d'intersection ?

5.2 Travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu l'exercice :

Q1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

Q2. Comment pourrait-on préciser la rédaction de la deuxième partie de la question 3 ? Quelles indications supplémentaires pourrait-on donner aux élèves ?

Q3. Quel peut-être l'intérêt de l'usage de la calculatrice pour la résolution de cet exercice ?

Sur ses fiches le candidat présentera :

– Sa réponse à la question Q2

– Un autre exercice sur le thème : fonctions de référence et fonctions associées : $f + \lambda$, λf, etc.

Documentation proposée

Programme de première S sur les fonctions (généralités, dérivation).