Deux démonstrations par dichotomie

Daniel PERRIN

0. Introduction.

On montre ici, en utilisant la méthode de dichotomie, le théorème des valeurs intermédiaires et le fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. L'intérêt de ces preuves est double :
1) l'unité : elles reposent sur la même technique, la dichotomie, et donc sur le même axiome de $\mathbf{R}$, la convergence des suites adjacentes,

2) la simplicité : l'axiome des suites adjacentes est, me semble-t'il, plus simple, pour des étudiants débutants, que celui de la borne supérieure et plus encore que celui de Bolzano-Weierstrass.

1. L'axiome et la méthode.

Je propose d'admettre le théorème suivant, qui définit les nombres réels (je ne rappelle pas la définition des suites adjacentes) :

Théorème et définition 1.1. *Il existe un unique corps totalement ordonné archimédien appelé corps des nombres réels et noté $\mathbf{R}$ qui vérifie l'axiome suivant : si (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes de nombres réels, elles ont une limite commune $c \in \mathbf{R}$. Le singleton $\{c\}$ est l'intersection des segments emboîtés $[a_n, b_n]$.*

La méthode de dichotomie consiste alors, à partir d'un segment $[a, b] = [a_0, b_0]$ de $\mathbf{R}$, avec $a \leq b$, à construire des segments $[a_n, b_n]$ par récurrence, $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ étant obtenu à partir de $[a_n, b_n]$ en sélectionnant (selon une loi à préciser dans chaque cas) l'un des deux segments moitiés : $[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}]$ ou $[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n]$. Il est clair alors que la suite (a_n) (resp. (b_n)) est croissante (resp. décroissante) et qu'on a $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, de sorte que ces suites sont adjacentes et donc, en vertu de 1.1, qu'elles ont une même limite $c \in [a, b]$.

2. Le théorème des valeurs intermédiaires.

Il s'agit essentiellement du résultat suivant :

Théorème 2.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue et soit $d \in [f(a), f(b)]$. Alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.*

Démonstration. 1) On peut supposer $d = 0$. En effet, si l'on a montré le théorème dans ce cas, on l'applique ensuite à $f - d$.
2) Si $f(a)$ ou $f(b)$ est nul le résultat est évident. Sinon, on peut supposer $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, quitte à appliquer le théorème à $-f$.

3) On construit par récurrence deux suites (a_n), croissante, et (b_n), décroissante, avec $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_n < b_n$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$. On passe de n à $n+1$ en considérant $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$. S'il est ≥ 0 on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$, s'il est < 0 on pose $b_{n+1} = b_n$ et $a_{n+1} = \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$.
Soit alors c la limite commune de (a_n) et (b_n). Comme f est continue, les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent vers $f(c)$. Mais, comme on a $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) \geq 0$, $f(c)$ est nul.

3. Les bornes.

Théorème 3.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors, f est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. On montre le cas du maximum. Pour cela on introduit la notion suivante :

Définition 3.2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction. Un intervalle $[A,B] \subset [a,b]$ sera dit* **dominant** *pour f s'il vérifie :*

$$\forall x \in [a,b], \quad \exists y \in [A,B], \quad \textit{tel que} \quad f(y) \geq f(x). \tag{1}$$

(Autrement dit c'est un intervalle qui pourrait adopter le slogan publicitaire : *quoi que propose la concurrence il y a toujours mieux chez nous !*) On a alors le lemme suivant :

Lemme 3.3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction. Si l'intervalle $[A,B]$ est dominant pour f et si C est dans $[A,B]$ l'un des intervalles $[A,C]$ ou $[C,B]$ est dominant.*

Démonstration. Si $[A,C]$ est dominant on a gagné. Sinon, c'est que l'on a :

$$\exists x_0 \in [a,b], \quad \forall y \in [A,C], \quad f(x_0) > f(y).$$

Mais, comme $[A,B]$ est dominant, il existe $y_0 \in [A,B]$ (et y_0 est donc dans $[B,C]$) avec $f(y_0) \geq f(x_0)$. On en déduit que $[B,C]$ est dominant. En effet, soit $x \in [a,b]$. Il existe $y \in [A,B]$ avec $f(y) \geq f(x)$. Si y est dans $[B,C]$ c'est fini ; s'il est dans $[A,C]$ on a $f(y) < f(x_0) \leq f(y_0)$ et on a gagné.

On déduit aussitôt de 3.3 par dichotomie :

Corollaire 3.4. *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction. Il existe une suite de segments emboîtés $[a_n, b_n]$ de largeur $\dfrac{b-a}{2^n}$ dominants pour f.*

On peut alors prouver 3.1. Soit c la limite commune des suites (a_n) et (b_n) de 3.4. Montrons que $f(c)$ est le maximum de f. Soit x quelconque dans $[a,b]$. Comme $[a_n, b_n]$ est dominant il existe $x_n \in [a_n, b_n]$ avec $f(x_n) \geq f(x)$. Mais alors, la suite (x_n) converge vers c et, puisque f est continue, $(f(x_n))$ converge vers $f(c)$ qui vérifie donc, à la limite $f(c) \geq f(x)$.