Suites récurrentes : la convergence rapide

1. Rappel.

Rappelons d'abord l'énoncé suivant :

Théorème 1. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, une fonction de classe C^1 qui admet un point fixe α intérieur à I. On suppose qu'on a $|f'(\alpha)| < 1$. Soit k un réel vérifiant $|f'(\alpha)| < k < 1$. Il existe un réel positif η tel que l'intervalle $J = [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$ soit stable par f et qu'on ait $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in J$. Si u_0 est dans J, la suite récurrente définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α et on a précisément $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.*

2. La convergence rapide.

Théorème 2. *On reprend les notations du théorème 1, mais on suppose la fonction f de classe C^2 et $|f'(\alpha)| = 0$. Alors, il existe un réel m avec $0 < m < 1$ et une constante $A > 0$ tels que l'on ait, pour n assez grand :*

$$|u_n - \alpha| \leq A\, m^{2^n}.$$

Démonstration. On montre d'abord un lemme :

Lemme 3. *On reprend les notations du théorème 2. On note $2M$ le maximum de la valeur absolue de la dérivée seconde f'' sur J. On a, pour tout x dans J : $|f(x) - \alpha| \leq M(x - \alpha)^2$.*

Démonstration. Il y a deux façons de faire.

• Au niveau DEUG, on applique Taylor-Lagrange en α et on a :

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2}{2} f''(\theta),$$

avec θ dans $]\alpha, x[$ et on conclut en tenant compte de $f(\alpha) = \alpha$ et $f'(\alpha) = 0$.

• Au niveau terminale, on étudie la fonction $g(x) = M(x - \alpha)^2 - f(x) + \alpha$ en dérivant deux fois et on montre qu'elle est ≥ 0. On fait de même avec $f(x) - \alpha + M(x - \alpha)^2$.

On revient au théorème. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq M(u_n - \alpha)^2$. Le problème c'est que M n'a pas de raison d'être < 1. Soit $p \in \mathbf{N}$. À partir de l'inégalité précédente, on montre par récurrence sur n que, pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$|u_{p+n} - \alpha| \leq \frac{1}{M}(M|u_p - \alpha|)^{2^n}.$$

Soit alors m avec $0 < m < 1$. En vertu du théorème 1, on sait que u_n tend vers α, de sorte que, pour p assez grand on a $|u_p - \alpha| \leq \frac{m}{M}$, donc $M|u_p - \alpha| \leq m$. On fixe un tel p. En posant $N = p + n$ on en déduit qu'on a, pour $N \geq p$:

$$|u_N - \alpha| \leq \frac{1}{M} m^{2^{N-p}} = \frac{1}{Mm^{2^p}} m^{2^N} = Am^{2^N}$$

en posant $A = \dfrac{1}{Mm^{2^p}}$.