Un exemple de fonction sans intervalle stable

Daniel PERRIN

1. Un lemme.

Lemme 1. *Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction de classe C^1. On suppose que f admet un unique point fixe β dans $[a, b]$ et que celui-ci est répulsif (i.e. $|f'(\beta)| > 1$). On a les propriétés suivantes :*
1) la dérivée en β est négative,
2) il existe deux points distincts $c, d \in [a, b]$, en involution : $f(c) = d$ et $f(d) = c$ (donc deux points fixes de $f \circ f$).

Démonstration. Rappelons qu'il existe au moins un point fixe de f dans $[a, b]$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. Supposons qu'il n'y ait qu'un point fixe répulsif β, avec une dérivée positive donc > 1. Il y a trois cas.
a) Le cas $\beta = b$. On a $f(b) = b$ et $f'(b) > 1$ donc $\dfrac{f(b) - f(x)}{b - x} = \dfrac{b - f(x)}{b - x} > 1$ pour x voisin de b, $x < b$. Cela signifie qu'on a $f(x) < x$. Mais, comme on a $f(a) \geq a$ il y a un point fixe entre a et x contrairement à l'hypothèse.
b) Le raisonnement est analogue dans le cas $\beta = a$.
c) Si on a $a < \beta < b$, l'hypothèse sur la dérivée montre comme ci-dessus qu'on a $f(x) < x$ pour $x < \beta$ assez voisin de β et on obtient encore une contradiction avec $f(a) \geq a$ avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Le point 2) résulte de 1) en considérant $f \circ f$ qui laisse stable $[a, b]$ et fixe β avec une dérivée $f'(\beta)^2 > 1$. On a donc un autre point fixe c pour $f \circ f$ et, si on pose $d = f(c)$, c et d sont bien en involution.

2. La fonction.

Il s'agit de la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 2$ (mais nombre de tels polynômes de degré 3 devraient convenir aussi). Notons qu'on a $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$, de sorte que les racines de f sont 1 et -2, que la dérivée de f est $f'(x) = 3x^2 - 3$ qui s'annule en ± 1 et que le maximum relatif de f en -1 vaut 4 et que son minimum relatif en $+1$ vaut 0. La fonction a trois points fixes : $\alpha \simeq -2,214$, $\beta \simeq 0,539$ et $\gamma \simeq 1,675$, tous trois répulsifs.

Théorème 2. *Il n'existe pas d'intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ stable par f.*

Bien sûr il y a trois points fixes, donc des singletons stables.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un intervalle $[a, b]$ stable par f. On a donc $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$. Vu l'étude de $f(x) - x$, cela impose que a est dans l'un des intervalles $[\alpha, \beta]$ ou $[\alpha, +\infty[$ et b dans $] - \infty, \alpha]$ ou $[\beta, \gamma]$. Comme on a $a < b$, la seule solution est $a \in [\alpha, \beta]$ et $b \in [\beta, \gamma]$.

L'intervalle $[a,b]$ étant stable contient au moins un point fixe. Le point 1) du lemme 1 montre qu'il ne peut pas contenir seulement α ou seulement γ. S'il ne contenait pas β, il devrait donc contenir à la fois α et γ, donc aussi β qui est entre les deux !
Considérons l'image réciproque $f^{-1}(]\gamma,+\infty[)$. En résolvant l'équation $f(x)=\gamma$ on voit que cette image réciproque contient, outre $]\gamma,+\infty[$ lui-même, l'intervalle $]u,v[$ où u,v désignent les racines de $f(x)=\gamma$ autres que γ : $u\simeq -1,783$ et $v\simeq 0,108$. Si l'intervalle $[a,b]$ rencontre $]u,v[$ en un point x, il ne peut être stable par f car on a $f(x)>\gamma$ et on a vu que b est $\leq \gamma$. En particulier, $[a,b]$ ne contient pas le point 0.
Cela montre que a ne peut être égal à α. En effet, comme $[a,b]$ contient β, il contiendrait 0 qui est entre α et β.
De même, b ne peut être égal à γ, sinon $[a,b]$ qui contient β contiendrait 1 qui est entre β et γ, donc aussi $f(1)=0$ et c'est impossible.
L'intervalle $[a,b]$ ne contient donc que le seul point fixe β. En vertu du second point du lemme 1, il contient donc deux points c,d échangés par f, donc fixes par $f\circ f$ (et pas par f). L'étude de $f\circ f$ montre qu'il y a seulement deux tels points : $c\simeq 0,246$ et $d\simeq 1,274$. Mais alors, 1 est dans $[c,d]$, donc dans $[a,b]$, donc $0=f(1)$ est dans $[a,b]$ et c'est absurde.