Une remarque sur les suites homographiques

0. Introduction.

La question qui motive ce texte est la suivante : on considère une homographie $f(x) = \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ et $\gamma \neq 0$ et la suite récurrente associée définie par un point de départ u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. On sait que, pour que cette suite soit bien définie, il convient d'éviter parmi les points de départ u_0 le pôle $p = -\dfrac{\delta}{\gamma}$ et tous ses antécédents par f et ses itérées, ceux-ci étant les points $v_n = g^n(p)$ où g désigne l'homographie réciproque de f. La question est alors : la suite (v_n) elle-même est-elle bien définie !

1. Changement de cadre.

Pour traiter le problème ci-dessus, nous étudierons plus généralement les homographies $f(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}$, (avec $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, sinon f est constante) que nous verrons comme fonctions d'une variable complexe. Comme ces applications ne sont pas en général définies sur $\mathbf{C}$ tout entier il est commode de compléter $\mathbf{C}$ en lui adjoignant un unique point à l'infini noté ∞. On note $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. On pose alors $f(\infty) = \dfrac{\alpha}{\gamma}$ et $f(-\dfrac{\delta}{\gamma}) = \infty$. Ces définitions se comprennent en notant que $\dfrac{\alpha}{\gamma}$ est la limite de $f(z)$ quand $|z|$ tend vers $+\infty$ et que $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers $-\dfrac{\delta}{\gamma}\cdot$ On complète ces définitions en posant $f(\infty) = \infty$ si γ est nul.

Avec ces définitions l'application f est une bijection de $\widehat{\mathbf{C}}$ sur lui-même et l'ensemble des homographies est un groupe pour la composition que nous noterons G.

2. Le principe de conjugaison.

Proposition 1. *Soit f une homographie de $\widehat{\mathbf{C}}$ distincte de l'identité. Alors f admet un ou deux points fixes dans $\widehat{\mathbf{C}}$.*

Démonstration. Si γ est non nul les points fixes sont les racines de l'équation

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0$$

qui a deux racines complexes sauf si son discriminant est nul. Si γ est nul, f, qui est une similitude directe, fixe l'infini et, sauf si $\alpha = 1$, un autre point.

Proposition 2. *Soient a, b deux points distincts de $\widehat{\mathbf{C}}$. Il existe une homographie h telle que $h(a) = 0$ et $h(b) = \infty$.*

Démonstration. Si a et b ne sont pas à l'infini il suffit de prendre $h(z) = \dfrac{z-a}{z-b}\cdot$ Le lecteur examinera les cas $a = \infty$ et $b = \infty$.

Proposition 3. *Soit f une homographie distincte de l'identité. Si f a deux points fixes elle est conjuguée dans G d'une "homothétie" (au sens complexe) $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Si f a un unique point fixe elle est conjuguée d'une translation $z \mapsto z + \beta$.*

Démonstration. Supposons que f a deux points fixes a, b. Soit h une homographie qui envoie a en 0 et b à l'infini. Posons $g = hfh^{-1}$. L'homographie g fixe 0 et ∞ (c'est le principe de conjugaison !). Un petit calcul montre que c'est alors une homothétie. Si f n'a qu'un point fixe a on envoie a à l'infini par h et on conclut de manière analogue.

Corollaire 4. *Soit f une homographie distincte de l'identité et soit n un entier > 0. Si f^n est distincte de l'identité, les points fixes de f et de f^n sont les mêmes.*

Démonstration. Quitte à conjuguer f on peut supposer que f est une homothétie ou une translation. Si on a $f(z) = \lambda z$, on a $f^n(z) = \lambda^n z$ et les points fixes de f^n sont encore 0 et ∞ sauf si $\lambda^n = 1$ auquel cas f^n est l'identité. Si f est une translation, f^n aussi et elles admettent toutes deux ∞ comme unique point fixe.

Corollaire 5. *Soit g une homographie qui vérifie $g^n(\infty) = \infty$, avec $n \geq 2$, et $g(\infty) \neq \infty$. Alors on a $g^n = \mathrm{Id}$.*

3. Retour au problème initial.

On considère une homographie $f(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ avec $\gamma \neq 0$, on appelle p le pôle, $p = -\dfrac{\delta}{\gamma}$, g l'homographie inverse et on étudie la suite des $v_n = g^n(p)$. Dire que cette suite n'est pas bien définie c'est dire que l'un des v_n est infini. Comme on a $f(p) = \infty$, donc $g(\infty) = p$, il s'agit de savoir s'il existe $n \geq 2$ tel que $g^n(\infty) = \infty$, avec (à cause de $\gamma \neq 0$), $g(\infty) \neq \infty$. On déduit donc du corollaire 5 le résultat suivant :

Théorème 6. *Soit $f(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ une homographie avec $\gamma \neq 0$, p le pôle de f, g l'homographie inverse. La suite $v_n = g^n(p)$ est bien définie sauf si g (et donc f) est d'ordre fini ≥ 2.*

Supposons f à coefficients **réels**. Il s'agit de savoir quand f est d'ordre fini $n \geq 2$.

Corollaire 7. *Avec les notations précédentes (f à coefficients réels et $f^n = \mathrm{Id}$), on a les cas suivants :*
a) Si f admet deux points fixes réels on a nécessairement $n = 2$ et la suite (v_n) vaut alternativement p et ∞.
b) Le cas où f admet un unique point fixe est impossible (f n'est pas d'ordre fini).
c) Si f admet deux points fixes complexes conjugués, f est conjuguée d'une rotation $z \mapsto \zeta z$ où ζ est une racine n-ème primitive de l'unité.

Démonstration. Si les points fixes sont réels f est conjuguée d'une homothétie **réelle** $x \mapsto \lambda x$ et n'est d'ordre fini que si λ vaut ± 1.

Exemple 8. Voici un exemple du dernier cas : $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\,x + 1}\cdot$ On a $f^3 = \mathrm{Id}$ et les points fixes de f sont i et $-i$. La suite v_n vaut alternativement $-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty, -\frac{1}{\sqrt{3}},$ etc.