Sur les suites cos n et sin n

Daniel PERRIN

Le but de ce qui suit est de donner des exemples de suites admettant tout un intervalle de $\mathbf{R}$ *comme valeurs d'adhérence. Le cas du cosinus est relativement facile, celui du sinus un peu plus compliqué.*

Théorème 1.
Soit $\theta \in \mathbf{R}^*$*. On suppose que le rapport* $\dfrac{\pi}{\theta}$ *est irrationnel (on sait que c'est le cas si* θ *est égal à* 1*, puisque* π *est irrationnel). Alors les suites* $\cos n\theta$ *et* $\sin n\theta$ *admettent tous les réels de* $[-1, 1]$ *pour valeurs d'adhérence.*

Démonstration. Pour le cosinus elle repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.
Soit G *le sous-groupe additif de* $\mathbf{R}$ *engendré par* θ *et* 2π*, c'est-à-dire :*

$$G = \{p\theta + 2q\pi \ \mid \ p, q \in \mathbf{Z} \ \}.$$

Alors, G *est partout dense dans* $\mathbf{R}$*.*

Démonstration. (du lemme 2) Rappelons que l'assertion "G est partout dense dans $\mathbf{R}$" signifie que, quel que soit $\epsilon > 0$, il y a un élément de G dans tout intervalle de $\mathbf{R}$ de largeur ϵ ou encore que tout nombre réel est limite d'une suite d'éléments de G.

On pose $G^+ = \{g \in G \ \mid \ g > 0\}$. C'est un ensemble non vide car il contient π. Soit $a = \inf G^+$. On distingue trois cas.

1) Si a est nul, cela signifie que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g \in G$ avec $0 < g < \epsilon$. La densité de G en résulte car il y a alors un élément de G de la forme ng, $n \in \mathbf{Z}$ dans tout intervalle de largeur ϵ. En effet, si on a un tel intervalle $]x, x + \epsilon[$, avec, disons, $x > 0$, il existe un entier $n > 0$ tel que $ng > x$ (c'est le fait que $\mathbf{R}$ est archimédien). Si on prend pour n le plus petit entier vérifiant cette propriété on a alors $x < ng < x + \epsilon$.

2) Si on a $a > 0$ et $a \in G$, on a $G = \mathbf{Z}a$, ensemble des multiples entiers de a. En effet, il est clair que $\mathbf{Z}a$ est contenu dans G. Réciproquement, soit $g \in G$. Il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $na \leq g < (n + 1)a$ (toujours le fait que $\mathbf{R}$ est archimédien). On en déduit $g - na \in G$ et $0 \leq g - na < a$ ce qui, vu la définition de a, implique $g = na$. Mais alors, comme 2π et θ sont dans G, on a $2\pi = na$, $\theta = ma$ avec $m, n \in \mathbf{Z}$ et il en résulte que $\pi/\theta = n/2m$ est rationnel, contrairement à l'hypothèse. Le deuxième cas est donc impossible.

3) Si on a $a > 0$ et $a \notin G$, il existe une suite $g_n \in G^+$, strictement décroissante et de limite a. En effet, commme a est la borne inférieure de G^+, on sait que pour

tout $\epsilon > 0$ il existe $g \in G^+$ dans $]a, a + \epsilon[$. On construit alors la suite g_n par récurrence en appliquant cette propriété avec $\epsilon = \mathrm{Min}\,(\frac{1}{n}, g_n)$ pour obtenir g_{n+1}. Mais alors $g_n - g_{n+1}$ est une suite d'éléments de G^+ qui tend vers 0 ce qui implique que $a = \inf G^+$ est nul et c'est absurde. Le troisième cas est donc impossible lui aussi et cela achève de montrer la densité de G.

On peut désormais prouver le théorème 1 dans le cas du cosinus. Soit $c \in [-1, 1]$ et soit $\epsilon > 0$. Il s'agit de montrer qu'il y a une infinité de termes de la suite $(\cos n\theta)$ dans l'intervalle $]c - \epsilon, c + \epsilon[$. On peut évidemment supposer $\epsilon < 2\pi$. Posons $\varphi = \mathrm{Arccos}\, c$. Comme G est dense dans $\mathbf{R}$ il y a une infinité d'éléments $g = p\theta + 2q\pi \in G$ dans l'ensemble $E = G \cap\,]\varphi - \epsilon, \varphi + \epsilon[$. Pour un $g \in E$ on a $\cos g = \cos p\theta = \cos |p|\theta$, de sorte que $\cos g$ est bien un terme de la suite $(\cos n\theta)_{(n \in \mathbf{N})}$ (attention, c'est ici que la démonstration ne marche plus avec le sinus, à cause du signe de p). De plus, en vertu de l'inégalité des accroissements finis, on a $|\cos g - \cos \varphi| \leq |g - \varphi| < \epsilon$, de sorte que $\cos g$ est dans $]c - \epsilon, c + \epsilon[$. Enfin, comme on a supposé $\epsilon < 2\pi$, on voit que deux éléments de E au plus peuvent avoir le même cosinus. Comme E est infini il y a donc une infinité de valeurs de $\cos g$ pour $g \in E$ et on a gagné.

Pour le cas du sinus, la démonstration précédente montre qu'il suffit de prouver le lemme suivant qui raffine le lemme 2 en obligeant les coefficients p à être positifs :

Lemme 3.
On pose $G' = \{p\theta + 2q\pi \mid p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{Z}\}$. La demi-droite $\mathbf{R}^+$ est contenue dans l'adhérence de G'.

Démonstration. Il suffit de prouver que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g \in G'$ avec $0 < g < \epsilon$. En effet, ensuite, il y aura un ng dans tout intervalle de largeur ϵ de $\mathbf{R}^+$.
Pour cela, on utilise le lemme 2. On sait qu'il y a une infinité de $p\theta + 2q\pi$ dans l'intervalle $]0, \epsilon[$. Si l'un deux a un coefficient $p > 0$ on a fini. Sinon, on prend $x = p\theta + 2q\pi$ avec $0 < x < \epsilon$ et $p < 0$. On a alors une infinité de $y = r\theta + 2s\pi \in G$ dans $]0, x[$, tous avec $r < 0$ d'après ce qui précède. Comme il y en a une infinité, l'un d'eux a un $r < p < 0$ (car pour un r fixé il n'y a qu'un nombre fini de $r\theta + 2s\pi$ dans l'intervalle $]0, x[$). On considère alors $x - y = (p - r)\theta + 2(q - s)\pi$. On a $x - y \in G'$ et $0 < x - y < x < \epsilon$ et c'est ce qu'on cherchait.