Convergence d'une suite récurrente

Théorème 1.
Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction de classe C^2. On suppose qu'il existe $l > 0$ tel que $|f'(x)| \leq l < 1$ pour tout $x \in [a, b]$. Soit $u_0 \in [a, b]$ et soit u_n la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, la suite u_n converge vers l'unique point fixe α de f. De plus, si $f'(\alpha)$ est $\neq 0$, il existe $\lambda \neq 0$ tel que l'on ait $u_n - \alpha \sim \lambda\, f'(\alpha)^n$.

Démonstration.
Quitte à faire le changement de variables $x \mapsto x - \alpha$ on se ramène au cas $\alpha = 0$. L'inégalité des accroissements finis montre alors qu'on a $|f(x)| \leq l\,|x|$ pour tout $x \in [a, b]$ et on en déduit, par récurrence, $|u_n| \leq l^n |u_0|$, ce qui montre que u_n converge vers 0.
Posons $k = f'(0)$, on a donc $0 < |k| \leq l < 1$. On peut écrire, sur $[a, b]$, $f(x) = kx + x^2 w(x)$ où w est continue, donc bornée en valeur absolue sur $[a, b]$ par un nombre $M > 0$. (On pose, pour $x \neq 0$, $w(x) = \dfrac{f(x) - xf'(0)}{x^2}$ et, comme $w(x)$ tend vers $\dfrac{f''(0)}{2}$ quand x tend vers 0 par Taylor-Lagrange, on prolonge w par continuité en 0.)

Il s'agit de montrer que u_n est équivalente à $\lambda\, k^n$, ou encore, en posant $v_n = \dfrac{u_n}{k^n}$, que v_n a une limite finie non nulle.

En posant $w_n = w(u_n)$ on a la relation $u_{n+1} = ku_n + u_n^2 w_n$ et la suite w_n est bornée par M. On en déduit : $v_{n+1} = v_n\big(1 + \dfrac{u_n w_n}{k}\big)$ ce qui montre que v_n a un signe constant pour n grand.

On a ensuite $\ln|v_{n+1}| - \ln|v_n| = \ln\big|1 + \dfrac{u_n w_n}{k}\big|$. Comme on a $\dfrac{|u_n||w_n|}{|k|} \leq \dfrac{M\, l^n\, |u_0|}{|k|}$, la série de terme général $\dfrac{|u_n||w_n|}{|k|}$ est convergente, de sorte que la série $\ln|v_{n+1}| - \ln|v_n|$ converge absolument. Il en résulte que la suite $\ln|v_n|$ admet une limite finie c, donc que $|v_n|$ a pour limite $e^c > 0$, et, puisque v_n est de signe constant, v_n a bien une limite non nulle λ, cqfd.

Remarque 2. Si f admet un point fixe α vérifiant $0 < |f'(\alpha)| < 1$, on sait qu'il existe un réel l et un intervalle $[a, b]$ stable par f sur lequel la condition $|f'(x)| \leq l < 1$ est réalisée.

On va maintenant améliorer le théorème 1 en donnant la suite du développement asymptotique de u_n.

Théorème 3.
On reprend les notations et les hypothèses du théorème 1 et on suppose $f''(\alpha) \neq 0$. On a alors

$$u_n = \alpha + \lambda\, f'(\alpha)^n + \mu\, f'(\alpha)^{2n} + o\big(f'(\alpha)^{2n}\big),$$

avec λ et $\mu \neq 0$.

Démonstration. On peut supposer $\alpha = 0$ et on pose encore $k = f'(0)$. En vertu du théorème 1, on peut écrire $u_n = \lambda\, k^n + v_n$ où la suite v_n est un $o\,(k^n)$. Par Taylor-Young on écrit $f(x)$ sous la forme $f(x) = kx + mx^2 + g(x)$ où $m = \frac{1}{2} f''(0)$ et où $g(x)$ est un $o(x^2)$. On a donc la relation $u_{n+1} = ku_n + mu_n^2 + g(u_n)$ et en remplaçant u_n par sa valeur en fonction de v_n on obtient $v_{n+1} = kv_n + mu_n^2 + g(u_n)$. Posons $w_n = \dfrac{v_n}{k^n}$. On obtient, pour $n \geq 0$:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{mu_n^2}{k^{n+1}} + \frac{g(u_n)}{k^{n+1}} = w_n + s_{n+1}.$$

Comme u_n est équivalent à $\lambda\, k^n$ et comme $g(x)$ est un $o(x^2)$, on voit que s_n est équivalent à $m\lambda^2\, k^{n-1} = Ck^{n-1}$ avec $C \neq 0$. La série de terme général $s_n = w_n - w_{n-1}$ est donc convergente. De plus, puisqu'on a $\sum_{p=0}^{n} s_p = w_n$ (en posant $s_0 = w_0$), la somme de la série en question est égale à la limite de w_n, c'est-à-dire à 0 puisque v_n est un $o(k^n)$. Il en résulte que w_n est l'opposé du reste de la série :

$$w_n = -\sum_{p=n+1}^{+\infty} s_p.$$

Mais on a le lemme suivant :

Lemme 4.
Si le terme général d'une série s_p est équivalent à Ck^{n-1} avec $|k| < 1$, le reste R_n de la série est équivalent à $\dfrac{C}{1-k} k^n$.

Avec ce lemme on a donc $w_n \sim -\dfrac{C}{1-k} k^n$, d'où $v_n \sim -\dfrac{C}{1-k} k^{2n}$ ce qui achève de prouver le théorème 3.

Démonstration du lemme 4. Posons $s_n = Ck^{n-1} + t_n$ où t_n est un $o(k^{n-1})$. Soit $\epsilon > 0$. Pour n assez grand on a $|t_n| \leq \epsilon |k|^{n-1}$. On a alors

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} s_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} Ck^{n-1} + \sum_{p=n+1}^{+\infty} t_n = S_n + T_n.$$

La première somme vaut $S_n = C\dfrac{k^n}{1-k}$ et on a $|T_n| \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \epsilon |k|^{n-1} = \epsilon \dfrac{|k|^n}{1-|k|}$. Il en résulte que R_n est équivalent à $\dfrac{C}{1-k} k^n$.

Remarques 5.
1) Le théorème 3 montre qu'on peut appliquer la méthode d'Aitken pour accélérer la convergence de la suite (u_n).
2) Si $f''(0)$ est nul, la même méthode montre que v_n est encore un $O(k^{2n})$ et on peut encore appliquer Aitken.
3) Si on suppose f de classe C^∞ on a pour tout $r > 0$ un développement asymptotique de la forme

$$u_n = \alpha + \lambda_1\, f'(\alpha)^n + \lambda_2\, f'(\alpha)^{2n} + \cdots + \lambda_r f'(\alpha)^{rn} + o\big(f'(\alpha)^{rn}\big).$$