CALCUL DE LA RACINE CARRÉE DE 2

Daniel PERRIN

a) Rappels.

On utilise la suite de Héron, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.
On sait que (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers $\sqrt{2}$. On a les relations suivantes :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}, \tag{1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}, \tag{2}$$

$$u_n - \sqrt{2} \leq 2\sqrt{2}\left(\frac{u_k - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n-k}}, \text{ pour } k \geq 0, \text{ et, en particulier} \tag{3}$$

$$u_n - \sqrt{2} \leq 2\sqrt{2}\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n}}. \tag{4}$$

Voici les premières valeurs de u_n, écrites sous forme de fractions :

$$u_0 = 2,\ u_1 = \frac{3}{2},\ u_2 = \frac{17}{12},\ u_3 = \frac{577}{408},\ u_4 = \frac{665857}{470832},\ u_5 = \frac{886731088897}{627013566048}$$

et les valeurs approchées correspondantes données par une calculatrice qui fournit 10 chiffres significatifs (donc 9 décimales) :

$$u_1 = 1,5,\ u_2 = 14,16666...,\ u_3 \simeq 1,414\,215\,68(6),\ u_4 \simeq 1,414\,213\,56(2)$$

Le but du jeu est d'obtenir plus de décimales que ce que donne la calculatrice pour $\sqrt{2}$, à savoir $1,414\,213\,562$.
Si on encadre $\sqrt{2}$ entre $1,41$ et $1,42$ et qu'on applique la formule (3) avec $k = 1$ on a $u_n - \sqrt{2} < 2,84\left(\frac{0,09}{2,82}\right)^{2^{n-1}}$. Pour avoir $\sqrt{2}$ avec p décimales exactes il suffit donc de prendre n tel que $2^{n-1}\ln\frac{2,82}{0,09} > \ln(2,84) + p\ln(10)$. On voit ainsi que $n = 4$ donne 11 décimales exactes, que $n = 5$ en donne 23, $n = 6$ en donne 47 et $n = 8$ en donne 191.

b) La course aux décimales.

On cherche à calculer les 11 premières décimales de $u_4 = \dfrac{665857}{470832}$. On peut évidemment poser la division et calculer à la main, mais c'est un peu lourd. Voici une autre méthode qui utilise la calculatrice.

On part de la valeur approchée $u_4 \simeq 1,414\,213\,56(2)$ (la dernière décimale pouvant être arrondie, on ne la prend pas en compte). On a donc $u_4 = 1,414\,213\,56 + x$, d'où, en multipliant par 470832 : $665857 = 470832 \times 1,414\,213\,56 + 470832x$. Pour calculer x il faut trouver le résultat **exact** de la multiplication $470832 \times 1,414\,213\,56$ ce que la calculatrice ne peut faire en une seule fois (il y a trop de chiffres). On décompose donc cette opération en deux :

$$\begin{aligned} 470832 \times 1,414\,213\,56 &= 470832 \times 1,414\,2 + 470832 \times 1356 \times 10^{-8} \\ &= 665850,6144 + 638\,448\,192 \times 10^{-8} = 665856,99888192 \end{aligned}$$

(on vérifie à chaque fois que le nombre de chiffres et la valeur du dernier chiffre sont corrects). On a donc : $470832x = 0,00111808$ et on en déduit (avec la calculatrice) $x = 0,237468991 \times 10^{-8}$ et $u_4 \simeq 1,414\,213\,562\,374\,689\,91$. On a ainsi les 11 premières décimales de $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1,414\,213\,562\,37...$$

Si on a du courage on peut calculer $u_5 = \dfrac{886731088897}{627013566048} = \dfrac{N}{D}$ de la même manière. On part d'une valeur approchée de $\sqrt{2}$ (par exemple celle donnée ci-dessus : $a = 1,414\,213\,562\,37$). On calcule le produit aD en fractionnant les deux termes $a = 1,414213 + 56237 \times 10^{-11} = a_1 + a_2$ et $D = 627 \times 10^9 + 13 \times 10^6 + 566 \times 10^3 + 48 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$. On trouve

$$aD = \sum_{i,j} a_i D_j = 886731088895,05936241376$$

$$\text{et} \qquad N - aD = 1,94063758624$$

$$\text{d'où (en utilisant la calculatrice)} \qquad u_5 - a = \frac{N - aD}{D} = 0,3095048802 \times 10^{-11}$$

$$\text{et, finalement,} \quad \sqrt{2} = 1,414\,213\,562\,373\,095\,048\,802...$$

(où les 21 décimales sont exactes, sauf le dernier 2).