1 Un contre-exemple

Je donne un contre-exemple à l'exercice 26 page 67 de Terracher (édition2002) :

Soit (u_n) *une suite vérifiant la relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$*. Montrer que, si la fonction admet une limite en tout point et si* (u_n) *est convergente, alors sa limite* l *vérifie* $l = f(l)$*.*

Si l'on ne suppose pas que l est dans le domaine de définition de f, l'énoncé est incorrect, comme le montre l'exemple suivant.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons α_n le milieu entre les points $1/(n+1)$ et $1/n$ (on a donc $\alpha_n = \dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$). On considère la fonction $f : I =]0,1] \to \mathbf{R}$ définie sur chaque intervalle $]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}]$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ comme suit :

- f est affine sur les intervalles $]1/(n+1), \alpha_n]$ et $[\alpha_n, 1/n]$
- on a $f(\dfrac{1}{n+1}) = \dfrac{1}{n+2}, \quad f(\alpha_n) = 1, \quad f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n+1}$.

La fonction f est continue sur I, mais elle ne se prolonge pas par continuité sur l'intervalle fermé $[0,1]$. En effet, si elle se prolongeait par $f(0) = l$ on aurait $\lim f(x_n) = l$ pour toute suite (x_n) tendant vers 0. Or, si on prend $x_n = 1/n$ on a la limite 0, tandis que si on prend $x_n = \alpha_n$ on a la limite 1.

L'intervalle $]0,1]$ est stable par f, de sorte que si on se donne $u_0 \in I$, la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie. Si on prend $u_0 = 1$ on voit aussitôt par récurrence qu'on a $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et la suite (u_n) converge vers 0. Pourtant, 0 n'est pas un point fixe de f car f n'est pas définie en 0 ni même prolongeable en 0.