La méthode de Daniel Bernoulli (1728)

pour calculer les racines d'un polynôme

Il s'agit d'une méthode qui permet de ramener le calcul des racines d'un polynôme à l'étude d'une suite récurrente. On se contente ici de présenter cette méthode sur l'exemple du polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$.

1) Montrer que P admet trois racines réelles λ, μ, ν vérifiant $\lambda > \mu > \nu$. Encadrer chacune de ces racines entre deux entiers. Quelle est la plus grande racine en valeur absolue ?

2) Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels vérifiant pour $n \geq 0$ la relation de récurrence :

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n.$$

(On parle aussi, quand on veut avoir l'air savant, du "système dynamique" (u_n).)
a) Montrer que toute suite (u_n) de E est entièrement déterminée par la donnée de ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2.
b) Montrer que E contient exactement trois suites de la forme $(u_n) = (r^n)$ pour trois réels non nuls r que l'on précisera.
c) Montrer que toutes les suites de la forme :

$$(*) \qquad u_n = a\lambda^n + b\mu^n + c\nu^n$$

avec $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$ sont dans E.
d) Montrer, réciproquement, que toute suite (u_n) de E est de la forme ci-dessus. (Calculer a, b, c pour que la formule $(*)$ soit vraie pour $n = 0, 1, 2$ et utiliser a).
e) Soit (u_n) la suite de E définie par $u_0 = u_1 = 0$ et $u_2 = 1$. Montrer qu'on a $u_n = a\lambda^n + b\mu^n + c\nu^n$ avec $a \neq 0$. En déduire la limite de u_{n+1}/u_n quand n tend vers $+\infty$. Calculer les premiers termes de (u_n) et donner une valeur approchée de λ à 10^{-3} près.

3) a) Écrire le polynôme Q dont les trois racines sont $\lambda - 1, \mu - 1, \nu - 1$.
Montrer que $\nu - 1$ est, en valeur absolue, la plus grande des trois racines. En déduire une méthode de calcul de ν.
b) Même question avec $\frac{1}{\lambda-1}, \frac{1}{\mu-1}, \frac{1}{\nu-1}$. Application au calcul de μ.

Réponses.

1) $\nu \in]-1, 0[$, $\mu \in]0, 1[$, $\lambda \in]2, 3[$.

2) b) $r = \lambda, \mu, \nu$. d) :

$$a = \frac{\mu\nu u_0 - (\mu + \nu)u_1 + u_2}{(\nu - \lambda)(\mu - \lambda)}, \quad b = \frac{\nu\lambda u_0 - (\nu + \lambda)u_1 + u_2}{(\lambda - \mu)(\nu - \mu)}, \quad c = \frac{\lambda\mu u_0 - (\lambda + \mu)u_1 + u_2}{(\mu - \nu)(\lambda - \nu)}.$$

e) La limite est $\lambda \simeq 2,24697134$.
Premiers termes de la suite : 0,0,1,2,5,11,25,56,126,283,636,1429,3211,7215,16212,36428.

3) a) $Q(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1$. b) $R(X) = X^3 + 2X^2 - X - 1$.