1 Une inégalité

Il s'agit de montrer le résultat suivant :

1.1 Théorème. *Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{C}$ et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. On a l'inégalité :* $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \mathrm{Tr}\,(AA^*) = \mathrm{Tr}\,(A^*A)$.

Démonstration. 1) On montre d'abord le résultat lorsque les valeurs propres de A sont réelles. On sait que l'application $A \mapsto q(A) = \mathrm{Tr}\,(AA^*)$ est une forme hermitienne définie positive sur $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, dont la forme polaire est $\varphi(A, B) = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\,(AB^*) + \mathrm{Tr}\,(BA^*))$. Pour $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\varphi(A, B)|^2 \leq q(A)q(B)$. On applique cette inégalité à A et A^*. On a $q(A) = q(A^*) = \mathrm{Tr}\,(AA^*)$ et $\varphi(A, A^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(A^2) + \mathrm{Tr}\,((A^*)^2) = \frac{1}{2}\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i}^2\big)$. Comme les λ_i sont réels, on a $\varphi(A, A^*) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$ et la conclusion.

2) On utilise un lemme :

1.2 Lemme. *Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{C}$ et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. On peut écrire A sous la forme $A = BU$ où U est une matrice unitaire et où B a pour valeurs propres $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|$.*

Avec ce lemme on peut achever la preuve du théorème. En effet, on a $AA^* = BUU^*B^* = BB^*$ et on a, en vertu du premier cas, $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \mathrm{Tr}\,(BB^*) = \mathrm{Tr}\,(AA^*)$.

3) Il reste à prouver le lemme. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$ on a $A = (a) = (|a|e^{i\theta})$ et on prend $U = (e^{-i\theta})$. Pour passer de $n-1$ à n on munit $\mathbf{C}^n$ du produit scalaire canonique pour lequel la base canonique est orthonormée. On choisit un vecteur propre e_1 de A relatif à $\lambda_1 = |\lambda_1|e^{i\theta_1}$ et de norme 1. On complète e_1 en une base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$ et on note P la matrice (unitaire) de passage. On a $A = PA'P^*$ où A' s'écrit par blocs $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & w \\ 0 & M \end{pmatrix}$, avec $M \in \mathbf{M}_{n-1}(\mathbf{C})$. Le développement du polynôme caractéristique $\det(A - X\mathrm{Id})$ montre que les valeurs propres de M sont $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Par l'hypothèse de récurrence on peut écrire $M = NV$ où N a pour valeurs propres $|\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|$ et où V est unitaire de dimension $n-1$. On pose alors $U' = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$, de sorte qu'on a $A'U'^{-1} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & wV^{-1} \\ 0 & N \end{pmatrix} := B'$. On a ainsi écrit $A' = B'U'$, où B' a pour valeurs propres $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|$ et où U' est unitaire. Mais alors, on a $A = PA'P^* = P(B'U')P^* = (PB'P^*)(PU'P^*) = BU$, avec les conditions requises : B est semblable à B', donc a les mêmes valeurs propres, et U est produit de trois matrices unitaires, donc est unitaire.

1.3 *Remarque.* Comme Bernard Héron me l'a fait remarquer, une autre méthode pour établir l'inégalité ci-dessus consiste à utiliser la décomposition de Schur, c'est-à-dire à écrire $A = U^*TU$ avec U unitaire et T triangulaire.