Un exo rigolo

L'exercice

0.1 Théorème. *Soit n un entier ≥ 1. On a la formule :*

$$A_n := \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Une démonstration

On pose $\zeta = e^{i\pi/n}$. Ce nombre est racine primitive $2n$-ème de l'unité. On a donc $\zeta^{2n} = 1$ et $\zeta^n = -1$. Si n est pair on a, de plus, $\zeta^{n/2} = i$.

On a aussi $\zeta^k = e^{ik\pi/n}$ et $\zeta^{-k} = e^{-ik\pi/n}$, d'où $\sin \dfrac{k\pi}{n} = \dfrac{\zeta^k - \zeta^{-k}}{2i}\cdot$ On en déduit :

$$A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\zeta^k - \zeta^{-k}}{2i} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\zeta^{2k} - 1}{2i\zeta^k}\cdot$$

Mais, le produit $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \zeta^k$ se calcule et c'est $\zeta^{1+2+\cdots+(n-1)} = \zeta^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Si n est impair on a $P_n = (-1)^{(n-1)/2} = i^{n-1}$, si n est pair on a encore $P_n = i^{n-1}$. Avec le terme i^{n-1} provenant des $n-1$ coefficients i en dénominateur de A_n cela fait $(-1)^{n-1}$ et on a donc :

$$A_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\zeta^{2k} - 1}{2^{n-1}}\cdot$$

Pour calculer le produit $Q_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (\zeta^{2k} - 1)$, on note que les ζ^{2k} sont les racines n-èmes de 1 différentes de 1 (car ζ est une racine $2n$-ème de 1). En vertu de la formule :

$$X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1),$$

ce sont donc les racines de $P(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1$. Mais alors les $\zeta^{2k} - 1$ sont les racines de :

$$P(X+1) = (X+1)^{n-1} + (X+1)^{n-2} + \cdots + (X+1) + 1 = X^{n-1} + \cdots + n.$$

Le produit des racines de ce polynôme, qui n'est autre que Q_n, vaut alors $(-1)^{n-1}n$ (au signe près c'est le coefficient constant du polynôme) et on en déduit la formule annoncée.

En fait, comme Bernard Héron me l'a fait remarquer, on a les formules[1] :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin \frac{x + k\pi}{n} = \frac{\sin x}{2^{n-1}} \quad \text{ou encore} \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{x + kn}{n} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{n}}$$

dont celle de l'exercice se déduit en faisant tendre x vers 0.

1. Merci à Olivier Perrin de m'avoir fait remarquer une erreur dans la version précédente de ce texte.

Une démonstration plus simple

Elle m'a été communiquée par Géry Huvent que je remercie vivement.

Posons $\xi = e^{2i\pi/n}$. Les racines n-ièmes de l'unité sont les ξ^k, de sorte que l'on a $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} X - \xi^k$ et $Q_n(X) := 1 + X + \cdots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} X - \xi^k$. On en déduit $Q_n(1) = n = \prod_{k=1}^{n-1} 1 - \xi^k = \prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - \xi^k\right|$.

Mais on a $1 - \xi^k = 1 - \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ d'où $\left|1 - \xi^k\right|^2 = 2(1 - \cos \frac{2k\pi}{n})$ et avec la formule $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ on a $\left|1 - \xi^k\right| = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$ car les sinus en question sont tous positifs pour $k \leq n - 1$. On en déduit le résultat.