Proportionnalité et linéarité

Daniel PERRIN

1 Introduction

L'objectif de ce texte est de donner des éléments pour traiter l'exposé de CAPES numéro 21 intitulé *Proportionnalité et linéarité*.

Sur un sujet comme celui-là, il est essentiel de proposer une discussion sur l'utilité de la notion en dehors des mathématiques. En effet, la proportionnalité est omniprésente dans les applications. D'un point de vue mathématique actuel, l'étude de la proportionnalité c'est essentiellement celle des fonctions linéaires et affines. Je renvoie au chapitre 1 de mon cours de M1 (*Mathématiques et autres disciplines*) pour toutes précisions. On regardera notamment les exemples concernant la loi d'Ohm, la dilatation et les méthodes d'interpolation et de régression. Pour ce qui concerne les grandeurs, voir le chapitre 4 de *Mathématiques d'École*. Attention, les phénomènes ne sont pas tous linéaires, tant s'en faut, il y a aussi des cas où apparaissent d'autres types de fonctions : quadratiques (par exemple l'aire du carré en fonction du côté), inverses (par exemple la pression en fonction du volume à température constante), exponentielles (par exemple la croissance ou décroissance des populations, ou les intérêts composés), etc. D'autres phénomènes, notamment de la vie courante, ne sont pas modélisés par des fonctions classiques, par exemple la taille d'une personne en fonction de l'âge, ou les cours de la bourse en fonction du temps.

2 Historique

2.1 Retour à Euclide : la théorie des proportions

La notion de proportion est présente chez Euclide dans le Livre V des Éléments. C'est un travail admirable, et une lecture attentive de ce livre montre qu'il contient en germe la théorie des nombres réels. **Attention** toutefois à ne pas tomber dans un anachronisme, les nombres, pour les Grecs sont essentiellement les entiers et les rapports dont nous allons parler n'ont pas pour eux le statut de nombres. Cette restriction est sans doute la plus grande faiblesse de la mathématique grecque.

Euclide considère des rapports de grandeurs (il ne dit pas lesquelles, mais il y a au moins les longueurs [1], les aires et les volumes). Il ne considère que des rapports entre des grandeurs de même type (c'est une restriction très gênante pour faire de la physique, penser à la définition de la vitesse). De plus, comme on l'a dit, ces rapports n'ont pas le statut de nombre. On ne verra jamais Euclide écrire : *posons* $\lambda = \frac{a}{b}$.

Ce qu'Euclide appelle une proportion c'est une égalité de rapports. Pour définir cette égalité, il n'utilise pas de division [2], mais une sorte de produit en croix. Voilà ce qu'il dit :

On dit de quatre grandeurs, a, b, c, d, prises dans cet ordre, que la première est à la deuxième dans le même rapport que la troisième est à la quatrième, quand n'importe quel équimultiple de la première et de la troisième grandeur est en même temps et respectivement soit supérieur, soit égal, soit inférieur à n'importe quel (autre) équimultiple de la deuxième et de la quatrième grandeur.

Au cas (improbable [3]) où le lecteur n'aurait pas saisi ce dont il est question, je traduis cette définition en langage moderne :

Les rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égaux si pour tous $q, p \in \mathbf{N}$, on a $qa > pb \iff qc > pd$, $qa = pb \iff qc = pd$ et $qa < pb \iff qc < pd$.

Attention, *a priori*, les rapports ne sont pas nécessairement rationnels. Avec nos connaissances sur les réels, cela revient simplement à dire que si l'on avait, par exemple, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, on pourrait trouver un rationnel entre les deux, donc des entiers p, q tels que $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ et on aurait alors $qa < pb$ mais $qc > pd$ contredisant la définition d'Euclide.

2.2 Un résultat important : la somme de proportions

Une proposition très importante, qui figure dans Euclide, et qui était encore très utilisée dans les années 1960 est la suivante :

2.1 Proposition. *Si plusieurs grandeurs sont en proportion, le rapport de l'un des antécédents au conséquent correspondant est égal au rapport de la somme de tous les antécédents à la somme de tous les conséquents.*

Démonstration. Pour prouver cette proposition, commençons par la dire en bon français mathématique actuel : si on a $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$ on a aussi

1. Notamment pour formuler le théorème de Thalès, les triangles semblables, etc.

2. Comme Platon le dit avec un brin de mépris : *Les calculateurs divisent, les savants multiplient.*

3. Je plaisante, mais on voit ici l'importance et la simplification qu'apportent les notations par rapport à la formulation initiale. Et encore, je n'ai pas pris la traduction la plus ancienne. Je répète que le point essentiel c'est qu'Euclide n'écrit pas les rapports et ne les considère pas comme des nombres.

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \cdot$ La démonstration est évidente si l'on veut bien **nommer** le rapport $\frac{a_1}{b_1} := \lambda$. En effet, on a alors $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, ..., $a_n = \lambda b_n$ et si l'on additionne :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \lambda b_1 + \lambda b_2 + \cdots + \lambda b_n = \lambda(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

et on a le résultat.

On voit que la preuve est facile [4] parce que – contrairement à ce que dit Platon – on a divisé : on a considéré le rapport comme un nombre, on lui a donné un nom (λ) et on a calculé avec λ comme avec des nombres ordinaires (en particulier on a utilisé la distributivité).

2.2.1 Une application : lemmes des proportions et du chevron

C'est un exemple magnifique d'utilisation de ce résultat (avec une soustraction) :

2.2 Proposition. *Soit ABC un triangle.*

1) Soit A' un point de (BC) (différent de C) on a $\frac{\mathcal{A}(ABA')}{\mathcal{A}(ACA')} = \frac{A'B}{A'C} \cdot$

2) Soit M un point du plan, différent de A, on suppose que (AM) coupe (BC) en A' différent de C. On a $\frac{\mathcal{A}(ABM)}{\mathcal{A}(ACM)} = \frac{A'B}{A'C} \cdot$

Applications multiples au concours des médianes, à Ménélaus, Céva, etc.

2.2.2 Une bêtise à ne pas dire

Nous venons de voir que, si l'on a $\frac{a_2}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, on en déduit $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \cdot$ **Attention**, on n'a **jamais** en revanche $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \cdot$ Le lecteur vérifiera que si, par exemple, on a $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2}$, on a $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \leq \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \cdot$

On rencontre souvent cette erreur dans les situations de pourcentages. On méditera par exemple sur l'assertion suivante d'une ex-ministre [5] française, à propos de ses adversaires politiques :

Ils ont augmenté les impôts de 30% dans le département, de 58% dans la région, soit en tout de 88% : c'est la double peine.

4. Le lecteur qui trouverait cette méthode trop triviale serait condamné à prouver le résultat dans le langage d'Euclide.

5. Pourtant diplômée de HEC et ministre du budget !

Ici, ce qui est pertinent, pour avoir le pourcentage d'augmentation sur le total, c'est le rapport $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ qui est $\leq \frac{58}{100}$ et pas la somme $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2} = \frac{30}{100}+\frac{58}{100} = \frac{88}{100}$.

2.3 Dans l'enseignement

Jusqu'à l'époque des mathématiques modernes, l'enseignement français reste dans la ligne d'Euclide. En particulier, on étudie la théorie des proportions, une proportion étant, par définition, l'égalité de deux rapports. Les rapports sont soit des rapports de nombres, soit des rapports de grandeurs, le plus souvent de même nature. À partir des années 1960, les grandeurs ont tendance à disparaître pour ne laisser subsister que les nombres.

2.3.1 Un exemple : le Monge-Guinchan de troisième de 1959

Un point a changé par rapport à Euclide : les rapports sont des nombres (dont on dit pas exactement la nature, sauf à partir des années 60 où on parle de réels). Voici ce que dit ce livre :

On dit que les nombres $a, b, c, \ldots$ *sont proportionnels aux nombres* $a', b', c', \ldots$ *s'ils vérifient les égalités :*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \cdots = K$$

et K s'appelle coefficient de proportionnalité. L'un des premiers résultats énoncés est 2.1, avec une variante avec la différence. L'un des exercices de base concerne les partages proportionnels.

Ensuite vient le produit en croix (on dit : *le produit des extrêmes est égal au produit des moyens*) et deux notions importantes : quatrième et moyenne proportionnelles, voir plus loin.

Un peu plus loin, on aborde les grandeurs proportionnelles, **pas nécessairement de même nature** [6], avec la définition suivante :

On dit que deux grandeurs mesurables sont proportionnelles si, lorsqu'on multiplie (ou l'on divise) la mesure de l'une par $2, 3, 4, \ldots$*, la mesure correspondante de l'autre est multipliée (ou divisée) par* $2, 3, 4, \ldots$

Il y a tout de suite un théorème qui assure que le rapport des mesures est constant.

Parmi les exemples les poids [7] et les volumes, la distance parcourue et le temps, etc.

6. Ce paragraphe disparaît dans le livre de la même collection de 1966.
7. On dirait aujourd'hui les masses.

3 Un exemple de problème : la quatrième proportionnelle

C'est le problème suivant : on a une proportion $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ et on connaît trois des nombres, calculer le quatrième. Par exemple : $18m$ *de tissu coûtent* 189 *euros, combien coûtent* $13m$ *?* Ou encore : 4 *stylos valent* 2, 42 *euros, combien valent* 14 *stylos ?* ou enfin [8] *Dix objets identiques coûtent 22 euros. Combien coûtent quinze de ces objets ?*

Il y a de multiples techniques.

3.1 La réduction à l'unité ou règle de trois

Elle consiste à chercher la valeur d'une unité, ici un mètre de tissu, qui vaut 189/18, puis à multiplier par la dernière valeur : $13 \times \frac{189}{18} \simeq 136,50$.

Le raisonnement est reproduit toujours de la même manière :

Si 18 *mètres de tissu coûtent* 189 *euros, un mètre coûtera* 18 *fois moins, donc* $\dfrac{189}{18}$ *euros et* 13 *mètres,* 13 *fois plus qu'un mètre, donc* $13 \times \dfrac{189}{18}\cdot$

On notera qu'ici, une fois fixée l'unité de longueur, on peut considérer les nombres 18 et 13 comme de vrais scalaires, sans dimension, ce qui facilite ce type de raisonnement.

Signalons que, dans le problème de X.D., il y a une variante qui consiste à passer non par 1 mais par 2 : deux stylos valent $1,21$ d'où 14 valent $7 \times 1,21 = 8,47$.

La méthode de réduction à l'unité, encore appelée règle de trois [9], est la méthode universelle à l'école primaire jusque dans les années [10] 1950. Plusieurs critiques font que cette méthode est presque abandonnée ensuite :

• Les critiques des gardiens du temple d'Euclide : la règle de trois repose fondamentalement sur la division.

• Les critiques des tenants du concret. Par exemple : 13 *ouvriers font* 273 *mètres d'ouvrage. Combien faudrait-il d'ouvriers pour en faire* $420m$ *?*

Si l'on passe à l'unité, il faut $\dfrac{13}{273}$ ouvriers pour faire un mètre et ce rapport n'a pas vraiment de sens. La solution proposée est de trouver le nombre $\frac{273}{13}$ de mètres faits par un ouvrier et de **diviser** 420 par ce nombre.

8. Ces deux derniers problèmes ont mis en difficulté deux récents ministres de l'éducation nationale, Messieurs X. D. et L. C.

9. Il y a une petite différence entre les deux du point de vue de l'apprentissage. Dans la règle de trois, on ne calcule pas explicitement le quotient. Au contraire, pour éviter la multiplication des erreurs d'arrondi, on conseille de faire la multiplication d'abord.

10. Et elle revient à l'honneur aujourd'hui.

On notera que c'est vraiment l'anti-Euclide et que ce n'est envisageable que parce que l'on dispose des décimaux.

• Les critiques des modernes, qui préfèrent une vision fonctionnelle.

3.2 Variante : produit par un rapport

C'est la même chose, mais sans formuler le passage par l'unité : *si* 18 *mètres valent* 189 *euros,* 13 *mètres vaudront les treize dix-huitièmes de cette somme donc* $189 \times \frac{13}{18}$. On notera le renversement d'écriture entre les deux cas.

3.3 Le produit en croix

Ou "le produit des extrêmes est égal au produit des moyens" comme on disait autrefois.

On écrit la proportion : $\dfrac{189}{18} = \dfrac{x}{13}$ et on en déduit $18x = 189 \times 13$, d'où x. Bien entendu, les opérations à faire sont les mêmes, mais il n'y a plus le passage par l'unité, mais une procédure – d'ailleurs un peu magique – pour obtenir le résultat.

Je cite un extrait de manuel de Cours Moyen de 1962 :

Pour trouver la réponse, il faut multiplier les deux nombres connus d'une branche de la croix et diviser le produit obtenu par le nombre connu isolé de l'autre branche.

En ce qui me concerne, je déteste ce genre de choses, parce qu'elles présentent les mathématiques comme un ensemble de règles plus ou moins absconses que l'on se garde bien de discuter.

3.4 Résoudre des équations

On note x le prix du mètre de tissu et y le prix de 13 mètres. On a alors les deux équations suivantes : $18x = 189$ et $13x = y$. On tire x de la première équation et on reporte dans la seconde. Cette méthode peut sembler inutilement compliquée. Elle a cependant un avantage, c'est d'avoir donné un nom au prix du mètre, ce qui permet de le réutiliser pour d'autres calculs. En fait, si l'on pense fonction linéaire, il vaudrait mieux appeler λ le prix au mètre (voire k si l'on veut éviter les lettres grecques) et la fonction qui est en cause ici est $f(x) = \lambda x$: prix de x mètres de tissu.

3.5 Graphiquement

On place le point de coordonnées $(18, 189)$ sur le graphique, on trace la droite joignant ce point à l'origine et on lit l'ordonnée du point de cette droite d'abscisse 13.

3.6 Et Euclide, il ferait quoi ?

Sans doute, pensant aux rapports de grandeurs homogènes, il dirait que le nombre cherché est à 189 ce que 13 est à 18 et finirait peut-être par faire le produit en croix, en tous cas pas une division !

3.7 Conclusion

Si l'on examine les diverses méthodes, il y a deux grands groupes : celles qui utilisent la division de 189 par 18, i.e. de deux grandeurs différentes (ici un prix et une longueur) et celles qui utilisent la division de 13 par 18 pour demeurer avec des rapports de grandeurs homogènes, sans compter celles qui répugnent aux divisions.

4 D'autres problèmes

4.1 Classification des situations possibles

La plupart des problèmes de proportionnalité, si on les présente sous forme de tableaux, ont deux lignes proportionnelles et toutes deux homogènes, le coefficient de proportionnalité pouvant, selon les cas, être un scalaire ou une grandeur. Voici deux exemples :

4.1.1 Les grandeurs quotients

Si l'on dispose dans la première ligne les distances parcourues par un véhicule et dans la seconde le temps mis pour les parcourir, la proportionnalité, si elle est réalisée, signifie que le mouvement est uniforme ou encore à vitesse constante et le rapport entre la première et la seconde ligne est la vitesse. Ici, la première ligne est une longueur, par exemple exprimée en mètres, ou en kilomètres et la seconde ligne est un temps, par exemple en secondes ou en heures. La vitesse est une **grandeur quotient** exprimée en ms^{-1} ou m/s ou km/h.

D'autres exemples : poids ou volumes, voire simplement nombre d'unités et prix, etc.

4.1.2 Deux grandeurs de même nature

En fait, cette situation là c'est essentiellement celle des **pourcentages**, voire des échelles. En effet, dans les deux cas, le coefficient de proportionnalité est sans dimension. La situation des pourcentages comprend en général une idée **d'inclusion** d'une des lignes du tableau dans l'autre (par exemple, les habitants de plusieurs villes et ceux qui votent pour tel parti). Pour les échelles c'est une idée d'homothétie.

Voici quelques exemples : dans une ligne on peut mettre le salaire, dans une autre l'impôt (supposé non progressif), ou encore la masse de farine obtenue à partir d'une certaine masse de blé, ou les intérêts par rapport au capital, ou la distance sur le terrain par rapport à celle sur la carte.

4.1.3 Une exception : les recettes de cuisine

Il y a une exception notable à ce schéma, c'est celle des recettes de cuisine. En effet, là, dans la première ligne du tableau on a les ingrédients, disons, pour 4 personnes : 4 œufs, $150g$ de beurre, $200g$ de farine, $10cl$ de crème fraîche, un verre d'eau et un zeste de citron. Dans la deuxième ligne, il s'agit d'écrire la liste des ingrédients pour 6 personnes, ou 5, ou 9, ou n. Ici, les lignes ne sont pas homogènes, mais on passe de l'une à l'autre par multiplication par un nombre.

La technique la plus simple est de multiplier par le rapport et, là encore, le problème est un peu différent selon que les nombres sont rationnels ou décimaux.

4.2 Moyenne proportionnelle

Déterminer une moyenne proportionnelle est un problème qui intervient beaucoup en géométrie. Le problème est le suivant : étant donnés deux nombres (ou deux grandeurs) a et b, déterminer un nombre c (appelé moyenne proportionnelle) tel que $c^2 = ab$. Le lien avec les proportions est qu'on a alors $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. En géométrie, on a souvent à construire des moyennes proportionnelles (par exemple pour construire un carré de même aire qu'un rectangle donné) et la recette pour cela est d'utiliser un triangle rectangle et sa hauteur (on a alors deux moyennes proportionnelles en évidence).

Ce type de problème peut être l'occasion de faire de l'arithmétique. Voici un exemple issu du manuel de Lebossé-Hémery : trouver la moyenne proportionnelle entre 3136 et 729. Tout le monde sait qu'on a $729 = 9^3 = 27^2$. Pour $3136 = 3200 - 64$ on a le facteur 64 : $3136 = 64 \times 49 = 7^2 \times 8^2$. On cherche alors x tel que $x^2 = 27^2 \times 7^2 \times 8^2$: $x = 27 \times 7 \times 8 = 1512$.

4.3 Grandeurs ou nombres ?

La notion de grandeur est essentielle dans toutes les applications des mathématiques, en physique ou ailleurs. Pour une discussion sur ce thème voir *Mathématiques d'Ecole*, chapitre 4. Cependant, elle peut parfois être source de difficulté. Voici un exemple très simple.

Une femme de ménage est payée 13 *euros de l'heure. Elle travaille* 20 *heures chaque mois. Combien gagne-t-elle dans l'année ?*

Il y a deux façons de raisonner en s'appuyant sur le sens du problème :

1) Le gain mensuel est de $13 \times 20 = 260$, le gain annuel est donc $12 \times 260 = 12 \times (13 \times 20) = 3120$ euros.

2) Le nombre d'heures annuel est de $12 \times 20 = 240$, donc le gain annuel est de $13 \times 240 = 13 \times (12 \times 20) = 3120$ euros.

On voit que les deux calculs conduisent à l'égalité $12 \times (13 \times 20) = 13 \times (12 \times 20)$ qui utilise la commutativité et l'associativité de la multiplication. En revanche, du point de vue des grandeurs, le calcul $(13 \times 12) \times 20$ n'a aucun sens (que signifie la multiplication 13×12 du tarif horaire par le nombre de mois ? !) et on ne peut donc pas comprendre l'égalité $13 \times (12 \times 20) = (13 \times 12) \times 20$, autrement dit, sur les grandeurs, il n'y a pas associativité de la multiplication !

Cela pose un vrai problème didactique, il faut trouver un équilibre entre deux lignes un peu contradictoires :

1) Ne pas perdre de vue le sens des calculs pour pouvoir les appliquer à des situations réelles.

2) Être conscient que le passage, peut-être provisoire, à un calcul purement mathématique peut être source de simplifications.

Il est clair que le premier point doit être privilégié au début de l'apprentissage, le second n'intervenant que plus tard dans la scolarité.

5 La fonction linéaire

Il faut expliquer pourquoi le graphe de la fonction $f(x) = ax$ est une droite. Déjà, parlons de repères. On choisit une origine O et deux axes passant par O, c'est-à-dire deux droites perpendiculaires en O, l'une notée $(x'Ox)$ l'autre $(y'Oy)$, avec sur chaque axe un point I et J avec $OI = OJ = 1$ (unité de longueur). Cela permet de porter des points M sur ces axes et de définir l'abscisse et l'ordonnée d'un point (faute de mesures algébriques on dit les choses avec la position).

Par exemple le point d'abscisse x sur l'axe des x est le point M tel que $OM = |x|$, du côté de I si x est positif et de l'autre sinon. On fait de même sur l'axe des y. Ensuite, le point $M = (x, y)$ est le point du plan qui est à l'intersection des perpendiculaires à Ox en le point d'abscisse x et à Oy en le point d'ordonnée y.

Si on a une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, son graphe $G(f)$ est alors l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in \mathbf{R}$.

5.1 Théorème. *Le graphe de l'application* $x \mapsto ax$ *avec* $a \in \mathbf{R}$ *est une droite passant par* O.

Démonstration. On considère le point A de coordonnées $(1, a)$, son projeté orthogonal J' sur l'axe des y, et le point M, d'abscisse x, situé sur la droite (OA). Je dis qu'il a pour ordonnée ax. En effet, soient H et K les projetés orthogonaux de M sur les axes. Alors par Thalès [11], on a $\frac{\overline{OH}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{OJ'}}$. Comme on a $\overline{OI} = 1$, $\overline{OH} = x$ et $\overline{OJ'} = a$, on en déduit $\overline{OK} = ax$.

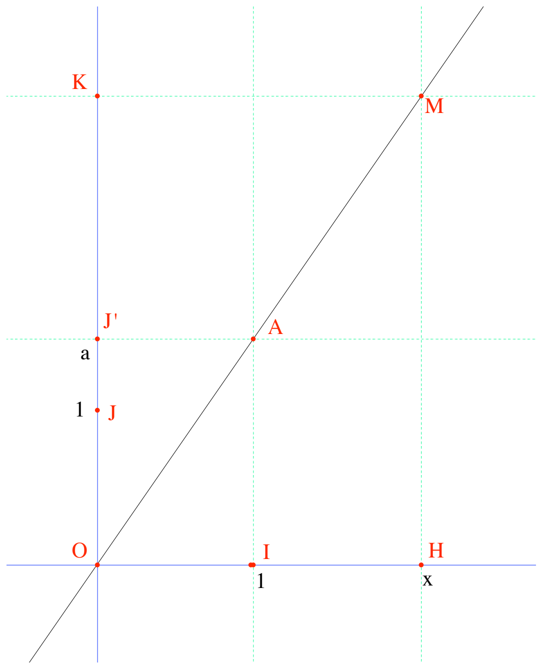

Figure 1 – Le graphe de la fonction $x \mapsto ax$

Il faut montrer aussi la réciproque. Si N est le point de coordonnées (x, ax), on introduit M d'abscisse x situé sur (OA) comme ci-dessus. On a vu qu'il est égal à N qui est donc sur (OA).

11. Que je dis avec des mesures algébriques parce que, sinon, on va s'em... avec des positions.

6 Le contenu des manuels actuels

6.1 Dioxyde de carbone

Voici un exercice assez typique des questions actuelles dans les manuels :
Dans $60l$ *d'air, on trouve en moyenne* $21ml$ *de dioxyde de carbone.*

a) Quel volume de dioxyde de carbone y a-t-il dans un litre d'air ?

b) Quel volume de dioxyde de carbone y a-t-il dans 100 *litres d'air ?*

c) Peut-on maintenant trouver sans multiplication le volume de dioxyde de carbone dans 160 *litres d'air ?*

4) Quel volume d'air contiendrait 29,4 *ml de dioxyde de carbone ?*

6.2 Manipulation des tableaux

La masse de peinture à utiliser est proportionnelle à l'aire de la surface à peindre selon le tableau suivant :

Aire en m^2	5	6	a	35	41
Masse en kg	3	b	2,25	c	d

Techniques proposées :
1) Pour trouver b : repérer le coefficient de proportionnalité qui est de 3/5 et multiplier 5 par 3/5.
2) Pour trouver a, opération inverse : multiplier $2,25$ par 5/3.
3) Pour trouver c : comme en 1) ou repérer que 35 c'est 7×5 et multiplier 3 par 7.
4) Pour trouver d : utiliser l'additivité, repérer que $41 = 35 + 6$ et ajouter b et c.

Attention, les deux dernières techniques sont conjoncturelles.

6.3 Arithmétique

Un exercice propose un code secret avec les lettres de l'alphabet, codées de 1 à 26, mais pas modulo 26. Ce code est forcément très limité ...

Dans l'exemple, le mot codé est $LXJFPBNJ$ et L devient F (division par 2). Le résultat est $FLECHAGE$. Avec la multiplication par 3, on est limité aux lettres A, B, C, D, E, F, G, H. Le meilleur mot que j'ai trouvé est $CACHE - CACHE$ qui devient $ICIWOICIWO$.