Proportionnalité et linéarité

Daniel PERRIN

1 Une définition mathématique de la proportionnalité ?

L'objectif de ce texte est de donner des éléments pour aborder l'exposé de CAPES numéro 21 intitulé *Proportionnalité et linéarité*. Bien que le contenu mathématique de cet exposé soit [1]élémentaire, il s'agit sans doute de l'un des plus délicats à traiter, car il nécessite une réflexion approfondie sur l'enseignement de ces notions au collège. Par rapport aux versions précédentes de ce texte, j'ai changé l'ordre des choses, notamment à la suite de l'exposé de Morgane Perrotin et des discussions qui s'en sont [2]ensuivies. Le point de départ de la discussion est la définition suivante, proposée par Morgane :

1.1 Définition. *Deux grandeurs x et y sont* **proportionnelles** *s'il existe un nombre a (non nul) tel que $y = ax$. On appelle le nombre a* **coefficient de proportionnalité**.

Dans cette définition, je conteste deux points : les "deux grandeurs" x, y (comment sont-elles reliées ?) et le fait que a soit un nombre (c'est en général une grandeur).

1.1 Grandeurs

D'un point de vue mathématique actuel, l'étude de la proportionnalité est essentiellement celle des fonctions linéaires, voir §2 ci-dessous. Cependant, sur un sujet comme celui-là, il est essentiel de proposer une discussion sur l'utilité de la notion en dehors des mathématiques. En effet, la proportionnalité est omniprésente dans les applications. Je renvoie au chapitre 1 de mon cours de M1 (*Mathématiques et autres disciplines*, voir : `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/interdisciplines/Cours1suites-et-fonctions2011.pdf`) pour des exemples. Cette question des applications oblige à se poser la question des [3]grandeurs et de leurs liens avec les nombres, au travers des mesures.

1. Et très ancien, voir §5.1.
2. Je remercie vivement Morgane et les autres pour tout cela.
3. Il faut parler de grandeurs. Morgane a raison sur ce point.

1.1.1 Grandeurs et mesures

On renvoie au chapitre 4 de *Mathématiques d'École* pour ce qui concerne les grandeurs. Pour dire les choses en un mot, une grandeur est associée à un objet matériel dont elle décrit un aspect. Ainsi on peut parler de la longueur d'un meuble, de l'aire qu'il occupe au sol, de son volume, de sa masse, de son prix, toutes ces caractéristiques étant des grandeurs de différentes natures. On peut comparer des grandeurs de même nature, les additionner, multiplier une grandeur par un nombre. En revanche, pour définir le produit de deux grandeurs, il faut avoir défini la grandeur produit (par exemple l'aire pour le produit de deux longueurs). En ce qui concerne les rapports, on peut faire en tous cas le rapport de deux grandeurs **de même nature** (le rapport y/x est le nombre a tel que $y = ax$).

Lorsqu'on a choisi une unité, on peut mesurer les grandeurs. Les mesures des grandeurs sont des nombres réels et on obtient ainsi un "isomorphisme" entre grandeurs et nombres. Bien entendu, changer d'unité change la mesure, mais pas la grandeur. Ainsi, on a $1\,km = 1000\,m = 100000\,cm$.

Une des difficultés de la notion de grandeur est le double sens du terme : le mot longueur peut signifier l'espèce longueur, parmi les grandeurs, ou la longueur d'un objet particulier. Dans la définition de Morgane, lorsque l'on parle de deux grandeurs, ce point n'est pas suffisamment précisé.

1.1.2 Rapports de grandeurs

Pour définir la proportionnalité, on aimerait définir le rapport des grandeurs concernées (pour dire qu'il est constant), mais une difficulté apparaît alors. En effet, lorsqu'on a deux grandeurs, il y a deux cas selon que les grandeurs en jeu sont ou non de même nature.

1.2 *Exemple.* Si les grandeurs sont des nombres (par exemple le nombre de personnes votant pour tel candidat et le nombre total d'électeurs), il n'y a pas de problème, le rapport est clairement un nombre réel (voire rationnel) : c'est notamment la situation des pourcentages.

1.3 *Exemple.* Si les grandeurs sont de même nature, le rapport a encore un sens et c'est un nombre réel comme on l'a dit. Par exemple si l'on utilise une carte, le rapport entre la distance sur la carte et la distance réelle est un nombre (l'échelle).

1.4 *Exemple.* La situation se complique lorsque les grandeurs ne sont pas de même nature, par exemple la distance parcourue et le temps. On peut toutefois définir le rapport, de deux manières différentes.

• On peut choisir des unités pour chacune des grandeurs, prendre les mesures des grandeurs concernées et faire le rapport de ces mesures.

• On peut aussi définir une grandeur quotient qui aura sa propre unité. Le quotient a un sens mais c'est devenu une grandeur. Par exemple avec les distances et les temps, le quotient d/t est la vitesse qui, si d est en km et t en heures, sera exprimée en km/h. Avec tension et intensité, le quotient $R = U/I$ est la résistance, exprimée en ohms si U est en volts et I en ampères.

1.5 *Remarque.* C'est le deuxième point que je conteste dans la définition de Morgane : la nature de a. Pour donner un exemple qui pose problème, lorsqu'un athlète court le $100\,m$ en 10 secondes, sa vitesse est de $10\,m/s$, mais aussi de $36\,km/h$. On voit ici que le nombre n'est pas le même selon les unités (et pas même à une puissance de 10 près). Cela montre bien qu'il s'agit d'une grandeur et pas d'un nombre, en réalité.

1.2 Situations fonctionnelles, situations de proportionnalité

1.2.1 Situations fonctionnelles

La plupart des situations où les mathématiques s'appliquent sont des situations **fonctionnelles**. Cela signifie que la situation fait intervenir plusieurs grandeurs qui sont liées par des relations. En termes mathématiques, certaines grandeurs sont des **fonctions** les unes des autres. On peut donner une pseudo-définition :

1.6 Définition. *Une situation est dite fonctionnelle s'il existe une application f qui, pour tous les objets étudiés, associe à une grandeur x (d'un objet) une autre grandeur y (du même objet ou d'un autre qui lui est associé) : on a donc $y = f(x)$.*

Voici quelques exemples :

1.7 *Exemple.* Lorsqu'on achète un article au marché, le coût dépend du poids de l'article (penser aux fruits et légumes), de sa longueur (penser à un tissu), voire du nombre d'articles (si le prix est à la pièce). On a donc $c = f(p)$ ou $c = f(l)$ ou $c = f(n)$.

1.8 *Exemple.* En physique cette situation est universelle. Par exemple quand on étudie la distance parcourue en fonction du temps, $d = f(t)$, ou la tension en fonction de l'intensité (loi d'Ohm), $U = f(I)$.

1.9 *Remarque.* Bien entendu, dans des situations plus complexes, on rencontre des fonctions de plusieurs variables, par exemple le volume d'une boîte de conserve cylindrique en fonction du diamètre de la base et de la hauteur, $V = \pi d^2 h/4$, ou la pression d'un gaz en fonction du volume et de la température, $p = nRT/V$, etc. On peut toutefois se ramener au cas d'une fonction d'une seule variable en en fixant certaines.

1.2.2 Proportionnalité

Les deux ingrédients précédents, situation fonctionnelle et rapports de grandeurs, permettent de proposer une définition :

1.10 Définition. *On dit qu'une situation fonctionnelle, qui associe, pour tout objet, une grandeur y à une grandeur x, est une situation de* **proportionnalité** *ou que les grandeurs sont proportionnelles, si le rapport $a = y/x$ est constant, en l'un ou l'autre des sens vus précédemment :*

- *soit on a défini une grandeur quotient et a est alors une grandeur,*
- *soit, sinon, le rapport des mesures de y et x, dans des unités fixées, est constant.*

1.11 *Remarque.* Si x, y sont des grandeurs et si la grandeur quotient a été définie, on peut alors écrire $y = ax$. Autrement dit, l'application f qui passe de x à y est donnée par $y = f(x) = ax$, voir ci-dessous. On retrouve la définition de Morgane, mais on a précisé le lien entre les grandeurs x, y et la nature de a.

1.12 *Remarque.* Attention, situation fonctionnelle ne signifie pas situation de proportionnalité. Il y a bien d'autres fonctions que les fonctions linéaires, y compris dans les applications. On peut avoir des fonctions quadratiques (par exemple l'aire du carré en fonction du côté), inverses (par exemple la pression en fonction du volume à température constante), exponentielles (par exemple la croissance ou décroissance des populations, ou les intérêts composés), affines par morceaux (par exemple les impôts en fonction du revenu en tenant compte des tranches), en escalier (par exemple le prix des timbres-poste selon le poids des lettres), etc. D'autres phénomènes, notamment de la vie courante, ne sont pas modélisés par des fonctions classiques, par exemple la taille d'une personne en fonction de l'âge, ou les cours de la bourse en fonction du temps.

1.2.3 Variante : le cas discret

Lorsqu'on ne veut pas parler de fonction (notamment au début du collège), on peut définir la proportionnalité de deux suites finies de grandeurs : des grandeurs $x_1, \dots, x_n$ et d'autres $y_1, \dots, y_n$. On dira qu'elles sont proportionnelles si leurs rapports sont égaux (avec la convention ci-dessus concernant les grandeurs quotients) : $\dfrac{y_1}{x_1} = \cdots = \dfrac{y_n}{x_n}\cdot$ Cette définition a l'avantage de pouvoir être donnée de manière élémentaire :

• Il suffit d'avoir quatre grandeurs x_1, x_2, y_1, y_2.

• On peut se contenter de regarder les mesures, auquel cas on dira qu'il existe un même nombre a tel que $y_i = ax_i$ pour tout i.

• On peut présenter la condition sous forme de tableau.

2 La fonction linéaire

Ce paragraphe précise le contenu mathématique de la proportionnalité. Le but est de comprendre ce qui est derrière cette notion pour l'employer de manière efficace.

2.1 Linéarité en dimension 1

Le jour du CAPES, il faut être capable de prouver le résultat suivant :

2.1 Proposition-Définition. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) Il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = ax$.

2) On a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tous réels λ, x.

3) On a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tous réels λ, x et $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y (linéarité au sens des mathématiciens).

On dit alors que f est une fonction **linéaire**. *Le coefficient a est appelé* **coefficient de proportionnalité**.

Démonstration. Montrons 1) $\Longrightarrow$ 2). On a $f(\lambda x) = a(\lambda x) = (a\lambda)x = (\lambda a)x = \lambda(ax)$ en utilisant l'associativité et la commutativité de la multiplication dans $\mathbf{R}$. Réciproquement, si l'on a 2), on l'applique avec λ quelconque et $x = 1$ et on a, pour tout λ, $f(\lambda) = \lambda f(1) = f(1)\lambda$ et la conclusion en posant $a = f(1)$ et en renommant $x := \lambda$.

Pour 3), il suffit de montrer 1) $\Longrightarrow$ 3) : $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x)+f(y)$, c'est la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

2.2 *Remarques.* 1) Il y a deux cas particuliers, le cas $a = 0$ où l'on trouve la fonction nulle et $a = 1$ où l'on a l'identité.

2) Il faut savoir répondre à la question suivante : une fonction qui vérifie $f(x+y) = f(x)+f(y)$ pour tous x, y est-elle linéaire ? (On montre facilement qu'on a $f(\lambda x) = \lambda x$ pour tout $\lambda \in \mathbf{Q}$, mais sans hypothèse supplémentaire

on ne peut conclure. Il faut supposer par exemple que f est continue ou monotone.)

3) La formulation 3) est celle qui se généralise en dimension plus grande, mais alors le point 1) n'est vérifié que dans le cas des homothéties.

2.3 Commentaire. Dans la suite, nous parlerons de la propriété **d'homothétie** pour indiquer que nous utilisons la fonction $x \mapsto ax$, de la propriété **d'homogénéité** pour signaler que nous utilisons la formule $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ et de la propriété **d'additivité** lorsque nous utilisons $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

2.2 Utilisation pratique

Pour montrer que ce qui précède n'est pas aussi théorique qu'on pourrait le croire, en voici une application élémentaire. On se propose de peindre une ou plusieurs pièces et la masse de peinture à utiliser est [4]proportionnelle à l'aire de la surface à peindre selon le tableau suivant :

Aire en m^2	5	6	a	35	41
Masse en kg	3	b	2,25	c	d

On cherche les quantités a, b, c, d et il y a plusieurs procédures possibles (parfois dès l'école primaire) et la multiplicité de ces approches est une difficulté didactique de la proportionnalité.

1) Pour trouver b : le plus simple est de repérer le coefficient de proportionnalité qui est de $3/5$ et multiplier 6 par $3/5$ (propriété d'homothétie).

2) Pour trouver a, c'est l'opération inverse : multiplier $2,25$ par $5/3$ (homothétie, en sens inverse).

3) Pour trouver c : comme en 1) ou repérer que 35 c'est 7×5 et multiplier 3 par 7 (homogénéité).

4) Pour trouver d : repérer que $41 = 35 + 6$ et ajouter b et c (additivité).

Attention, les deux dernières techniques, qui utilisent la linéarité, ne fonctionnent bien que parce que les nombres sont adaptés.

4. J'ai repris le texte dans un manuel mais la quantité de peinture me semble exagérée.

2.3 Graphe

Il s'agit d'expliquer pourquoi le graphe de la fonction $f(x) = ax$ est une [5]droite. Déjà, parlons de repères. On choisit une origine O et deux axes passant par O, c'est-à-dire deux droites perpendiculaires en O, l'une notée $(x'Ox)$ l'autre $(y'Oy)$, avec sur chaque axe un point I et J avec $OI = OJ = 1$ (unité de longueur). Cela permet de porter des points M sur ces axes et de définir l'abscisse et l'ordonnée d'un point (faute de mesures algébriques on dit les choses avec la position).

Par exemple le point d'abscisse x sur l'axe des x est le point M tel que $OM = |x|$, du côté de I si x est positif et de l'autre sinon. On fait de même sur l'axe des y. Ensuite, le point $M = (x, y)$ est le point du plan qui est à l'intersection des perpendiculaires à Ox en le point d'abscisse x et à Oy en le point d'ordonnée y.

Si on a une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, son graphe $G(f)$ est alors l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in \mathbf{R}$.

2.4 Théorème. *Le graphe de l'application $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbf{R}$ est une droite passant par O.*

Démonstration. On considère le point A de coordonnées $(1, a)$, son projeté orthogonal J' sur l'axe des y, et le point M, d'abscisse x, situé sur la droite (OA). Je dis qu'il a pour ordonnée ax. En effet, soient H et K les projetés orthogonaux de M sur les axes. Alors par Thalès [6], on a $\dfrac{\overline{OH}}{\overline{OI}} = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OK}}{\overline{OJ'}}$. Comme on a $\overline{OI} = 1$, $\overline{OH} = x$ et $\overline{OJ'} = a$, on en déduit $\overline{OK} = ax$.

Il faut montrer aussi la réciproque. Si N est le point de coordonnées (x, ax), on introduit M d'abscisse x situé sur (OA) comme ci-dessus. On a vu qu'il est égal à N qui est donc sur (OA).

3 La proportionnalité au collège

3.1 Une définition ?

On a vu qu'il est difficile de donner une définition de la proportionnalité qui soit à la fois correcte mathématiquement et compréhensible par des élèves. C'est pourquoi il ne faut sans doute pas vouloir donner une telle définition

5. Bien entendu, vous savez cela, mais ce n'est pas pour autant que c'est évident, surtout pour les élèves. J'ajoute que le fait que le graphe d'une fonction linéaire est une droite est un **théorème**, et pas une définition ...

6. Que je dis avec des mesures algébriques. Sinon, on va s'em... avec des positions.

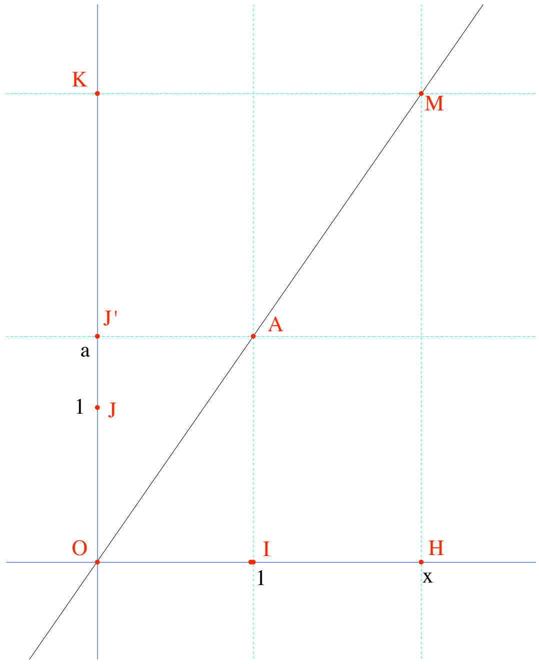


FIGURE 1 – Le graphe de la fonction $x \mapsto ax$

trop tôt (et sans doute pas au début du collège). On se contentera de donner des exemples, avec ou sans[7] tableaux de proportionnalité.

Si l'on tient absolument à donner une définition on peut hasarder celle-ci (la référence aux mesures évite de parler de grandeur quotient) :

3.1 Définition. *Si dans une situation deux grandeurs x et y se correspondent, on dit que y et x sont proportionnelles s'il existe un nombre a tel que les mesures de x et y vérifient $y = ax$ pour toutes les valeurs de x, y.*

On peut aussi donner une définition sur les nombres :

3.2 Définition. *On dit que les nombres x et y sont proportionnels aux nombres a et b si l'on a $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$.*

Voir §5.2 pour voir comment l'on donnait ces définitions autrefois.

3.2 Retour sur les grandeurs

On a vu plus haut l'importance des grandeurs. La plupart des problèmes de proportionnalité, si on les présente sous forme de tableaux, ont deux lignes

7. Il faut bien comprendre qu'on peut traiter des problèmes de proportionnalité sans tableaux. C'est une représentation commode, mais qui est d'introduction relativement récente, voir §5.2. En un mot, attention, ce n'est pas parce qu'une technique est celle que l'on vous a enseigné que c'est forcément la seule, ni même la meilleure.

proportionnelles, chacune constitué de grandeurs de même nature, le coefficient de proportionnalité pouvant, selon les cas, être un scalaire ou une grandeur. Voici deux exemples :

3.2.1 Les grandeurs quotients

Si l'on dispose dans la première ligne les distances parcourues par un véhicule et dans la seconde le temps mis pour les parcourir, la proportionnalité, si elle est réalisée, signifie que le mouvement est uniforme ou encore à vitesse constante et le rapport entre la première et la seconde ligne est la vitesse. Ici, la première ligne est une longueur, par exemple exprimée en mètres, ou en kilomètres et la seconde ligne est un temps, par exemple en secondes ou en heures. La vitesse est une **grandeur quotient** exprimée en ms^{-1} ou m/s ou km/h.

D'autres exemples : masses et volumes, voire simplement nombre d'unités et prix, etc.

3.2.2 Deux grandeurs de même nature

En fait, cette situation là c'est essentiellement celle des **pourcentages**, voire des échelles. En effet, dans les deux cas, le coefficient de proportionnalité est sans dimension. La situation des pourcentages comprend en général une idée **d'inclusion** d'une des lignes du tableau dans l'autre (par exemple, les habitants de plusieurs villes et ceux qui votent pour tel parti). Pour les échelles c'est une idée d'homothétie.

Voici quelques exemples : dans une ligne on peut mettre le salaire, dans une autre l'impôt (supposé non progressif), ou encore la masse de farine obtenue à partir d'une certaine masse de blé, ou les intérêts par rapport au capital, ou la distance sur le terrain par rapport à celle sur la carte.

3.2.3 Une exception : les recettes de cuisine

Il y a une exception notable à ce schéma, c'est celle des recettes de cuisine. En effet, là, dans la première ligne du tableau on a les ingrédients, disons, pour 4 personnes : 4 œufs, $150\,g$ de beurre, $200\,g$ de farine, $10\,cl$ de crème fraîche, un verre d'eau et un zeste de citron. Dans la deuxième ligne, il s'agit d'écrire la liste des ingrédients pour 6 personnes, ou 5, ou 9, ou n. Ici, les lignes ne sont pas homogènes, mais on passe de l'une à l'autre par multiplication par un nombre.

3.2.4 Dépasser les grandeurs ?

Je redis encore que la notion de grandeur est essentielle dans toutes les applications des mathématiques, en physique ou ailleurs. Cependant, elle peut parfois être source de difficulté et, pour aller plus loin dans les mathématiques, il peut être nécessaire de s'en affranchir. Voici un exemple très simple.

Une femme de ménage est payée 13 *euros de l'heure. Elle travaille* 20 *heures chaque mois. Combien gagne-t-elle dans l'année ?*

Il y a deux façons de raisonner en s'appuyant sur le sens du problème :

1) Le gain mensuel est de $13 \times 20 = 260$, le gain annuel est donc $12 \times 260 = 12 \times (13 \times 20) = 3120$ euros.

2) Le nombre d'heures annuel est de $12 \times 20 = 240$, donc le gain annuel est de $13 \times 240 = 13 \times (12 \times 20) = 3120$ euros.

On voit que les deux calculs conduisent à l'égalité $12 \times (13 \times 20) = 13 \times (12 \times 20)$ qui utilise la commutativité et l'associativité de la multiplication. En revanche, du point de vue des grandeurs, le calcul $(13 \times 12) \times 20$ n'a aucun sens (que signifie la multiplication 13×12 du tarif horaire par le nombre de mois ? !) et on ne peut donc pas comprendre l'égalité $13 \times (12 \times 20) = (13 \times 12) \times 20$, autrement dit, sur les grandeurs, il n'y a pas associativité de la multiplication !

Cela pose un vrai problème didactique, il faut trouver un équilibre entre deux positions un peu contradictoires :

1) Ne pas perdre de vue le sens des calculs pour pouvoir les appliquer à des situations réelles.

2) Être conscient que le passage, peut-être provisoire, à un calcul purement mathématique peut être source de simplifications.

Il est clair que le premier point doit être privilégié au début de l'apprentissage, le second n'intervenant que plus tard dans la scolarité.

3.3 Un résultat important mais oublié : la somme de proportions

Une proposition très importante, qui figure dans Euclide, et qui était encore très utilisée dans les années 1960 est la suivante :

3.3 Proposition. *Si plusieurs grandeurs sont en proportion, le rapport de l'un des antécédents au conséquent correspondant est égal au rapport de la somme de tous les antécédents à la somme de tous les conséquents.*

Démonstration. Pour prouver cette proposition, commençons par la dire en bon français mathématique actuel : si on a $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$ on a aussi

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}\cdot$ La démonstration est évidente si l'on veut bien **nommer** le rapport $\frac{a_1}{b_1} := \lambda$. En effet, on a alors $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, ..., $a_n = \lambda b_n$ et si l'on additionne :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \lambda b_1 + \lambda b_2 + \cdots + \lambda b_n = \lambda(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

et on a le résultat.

On voit que la preuve est facile [8] parce que – contrairement à ce que dit Platon, voir 5.1 – on a divisé : on a considéré le rapport comme un nombre, on lui a donné un nom (λ) et on a calculé avec λ comme avec des nombres ordinaires (en particulier on a utilisé la distributivité).

3.3.1 Une application : lemmes des proportions et du chevron

C'est un exemple magnifique d'utilisation de ce résultat (avec une soustraction) :

3.4 Proposition. *Soit ABC un triangle.*

1) Soit A' un point de (BC) (différent de C) on a $\frac{\mathcal{A}(ABA')}{\mathcal{A}(ACA')} = \frac{A'B}{A'C}\cdot$

2) Soit M un point du plan, différent de A, on suppose que (AM) coupe (BC) en A' différent de C. On a $\frac{\mathcal{A}(ABM)}{\mathcal{A}(ACM)} = \frac{A'B}{A'C}\cdot$

Ce lemme a des applications multiples au concours des médianes, à Ménélaus, Céva, etc, voir *Mathématiques d'école.*

3.3.2 Une bêtise à ne pas dire

Nous venons de voir que, si l'on a $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, on en déduit $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}\cdot$ **Attention**, on n'a **jamais** en revanche $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\cdot$ Le lecteur vérifiera que si, par exemple, on a $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2}$, on a $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \leq \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\cdot$

On rencontre souvent cette erreur dans les situations de pourcentages. On méditera par exemple sur l'assertion suivante d'une ex-ministre [9] française, à propos de ses adversaires politiques :

8. Le lecteur qui trouverait cette méthode trop triviale serait condamné à prouver le résultat dans le langage d'Euclide, voir §5.1.

9. Pourtant diplômée de HEC et ministre du budget !

Ils ont augmenté les impôts de 30% *dans le département, de* 58% *dans la région, soit en tout de* 88% *: c'est la double peine.*

Ici, ce qui est pertinent, pour avoir le pourcentage d'augmentation sur le total, c'est le rapport $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ qui est $\leq \frac{58}{100}$ et pas la somme $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2} = \frac{30}{100}+\frac{58}{100} = \frac{88}{100}$.

4 Un problème standard : la quatrième proportionnelle

C'est le problème suivant : on a une proportion $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ et on connaît trois des nombres, calculer le quatrième. Par exemple : $18m$ *de tissu coûtent* 189 *euros, combien coûtent* $13m$ *?* Ou encore : 4 *stylos valent* 2, 42 *euros, combien valent* 14 *stylos ?* ou enfin[10] *Dix objets identiques coûtent 22 euros. Combien coûtent quinze de ces objets ?*

Il y a de multiples techniques.

4.1 La réduction à l'unité ou règle de trois

Elle consiste à chercher la valeur d'une unité, ici un mètre de tissu, qui vaut 189/18, puis à multiplier par la dernière valeur : $13 \times \frac{189}{18} \simeq 136,50$.

Le raisonnement est reproduit toujours de la même manière :

Si 18 *mètres de tissu coûtent* 189 *euros, un mètre coûtera* 18 *fois moins, donc* $\dfrac{189}{18}$ *euros et* 13 *mètres,* 13 *fois plus qu'un mètre, donc* $13 \times \dfrac{189}{18}$.

On notera qu'ici, une fois fixée l'unité de longueur, on peut considérer les nombres 18 et 13 comme de vrais scalaires, sans dimension, ce qui facilite ce type de raisonnement.

Signalons que, dans le problème de X.D., il y a une variante qui consiste à passer non par 1 mais par 2 : deux stylos valent 1, 21 d'où 14 valent $7 \times 1,21 = 8,47$.

La méthode de réduction à l'unité, encore appelée règle de trois[11], est la méthode universelle à l'école primaire jusque dans les années[12] 1950. Plusieurs critiques font que cette méthode est presque abandonnée ensuite :

10. Ces deux derniers problèmes ont mis en difficulté deux récents ministres de l'éducation nationale, Messieurs X. D. et L. C.

11. Il y a une petite différence entre les deux du point de vue de l'apprentissage. Dans la règle de trois, on ne calcule pas explicitement le quotient. Au contraire, pour éviter la multiplication des erreurs d'arrondi, on conseille de faire la multiplication d'abord.

12. Et elle revient à l'honneur aujourd'hui.

• Les critiques des gardiens du temple d'Euclide, voir §5.1 : la règle de trois repose fondamentalement sur la division.

• Les critiques des tenants du concret. Par exemple : 13 *ouvriers font* 273 *mètres d'ouvrage. Combien faudrait-il d'ouvriers pour en faire* 420*m ?*

Si l'on passe à l'unité, il faut $\dfrac{13}{273}$ ouvriers pour faire un mètre et ce rapport n'a pas vraiment de sens. La solution proposée est de trouver le nombre $\frac{273}{13}$ de mètres faits par un ouvrier et de **diviser** 420 par ce nombre. On notera que c'est vraiment l'anti-Euclide et que ce n'est envisageable que parce que l'on dispose des décimaux.

• Les critiques des modernes, qui préfèrent une vision fonctionnelle.

4.2 Variante : produit par un rapport

C'est la même chose, mais sans formuler le passage par l'unité : *si* 18 *mètres valent* 189 *euros,* 13 *mètres vaudront les treize dix-huitièmes de cette somme donc* $189 \times \frac{13}{18}\cdot$ On notera le renversement d'écriture entre les deux cas.

4.3 Le produit en croix

Ou "le produit des extrêmes est égal au produit des moyens" comme on disait autrefois.

On écrit la proportion : $\dfrac{189}{18} = \dfrac{x}{13}$ et on en déduit $18x = 189 \times 13$, d'où x. Bien entendu, les opérations à faire sont les mêmes, mais il n'y a plus le passage par l'unité, mais une procédure – d'ailleurs un peu magique – pour obtenir le résultat.

Je cite un extrait de manuel de Cours Moyen de 1962 :

Pour trouver la réponse, il faut multiplier les deux nombres connus d'une branche de la croix et diviser le produit obtenu par le nombre connu isolé de l'autre branche.

En ce qui me concerne, je déteste ce genre de choses, parce qu'elles présentent les mathématiques comme un ensemble de règles plus ou moins absconses que l'on se garde bien de discuter.

4.4 Résoudre des équations

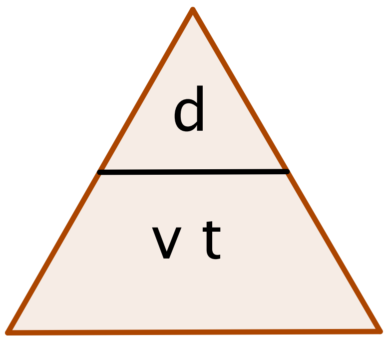
On note x le prix du mètre de tissu et y le prix de 13 mètres. On a alors les deux équations suivantes : $18x = 189$ et $13x = y$. On tire x de la première équation et on reporte dans la seconde. Cette méthode peut sembler inutilement compliquée. Elle a cependant un avantage, c'est d'avoir donné un nom au prix du mètre, ce qui permet de le réutiliser pour d'autres calculs. En fait, si l'on pense fonction linéaire, il vaudrait mieux appeler λ le prix au mètre (voire k si l'on veut éviter les lettres grecques) et la fonction qui est en cause ici est $f(x) = \lambda x$: prix de x mètres de tissu.

4.5 Graphiquement

On place le point de coordonnées $(18, 189)$ sur le graphique, on trace la droite joignant ce point à l'origine et on lit l'ordonnée du point de cette droite d'abscisse 13.

4.6 Les physiciens

Voici un dessin utilisé en physique pour retrouver les formules liant la distance parcourue d, le temps t et la vitesse v. La recette : on masque la quantité cherchée et on trouve alors la formule avec le triangle magique, la barre centrale servant de trait de fraction. La critique est la même que pour le produit en croix ci-dessus : ce n'est qu'une recette.



4.7 Conclusion

Si l'on examine les diverses méthodes, il y a deux grands groupes : celles qui utilisent la division de 189 par 18, i.e. de deux grandeurs différentes (ici un prix et une longueur) et celles qui utilisent la division de 13 par 18 pour demeurer avec des rapports de grandeurs homogènes, sans compter celles qui répugnent aux divisions.

5 Annexe : l'historique de la notion de proportionnalité

5.1 Retour à Euclide : la théorie des proportions

La notion de proportion est présente chez Euclide dans le Livre V des Éléments. C'est un travail admirable, et une lecture attentive de ce livre montre qu'il contient en germe la théorie des nombres réels. **Attention** toutefois à ne pas tomber dans un anachronisme, les nombres, pour les Grecs sont essentiellement les entiers et les rapports dont nous allons parler n'ont pas pour eux le statut de nombres. Cette restriction est sans doute la plus grande faiblesse de la mathématique grecque.

Euclide considère des rapports de grandeurs (il ne dit pas lesquelles, mais il y a au moins les longueurs [13], les aires et les volumes). Il ne considère que des rapports entre des grandeurs de même type (c'est une restriction très gênante pour faire de la physique, penser à la définition de la vitesse). De plus, comme on l'a dit, ces rapports n'ont pas le statut de nombre. On ne verra jamais Euclide écrire : *posons* $\lambda = \frac{a}{b}$.

Ce qu'Euclide appelle une proportion c'est une égalité de rapports. Pour définir cette égalité, il n'utilise pas de division [14], mais une sorte de produit en croix. Voilà ce qu'il dit :

On dit de quatre grandeurs, a, b, c, d, prises dans cet ordre, que la première est à la deuxième dans le même rapport que la troisième est à la quatrième, quand n'importe quel équimultiple de la première et de la troisième grandeur est en même temps et respectivement soit supérieur, soit égal, soit inférieur à n'importe quel (autre) équimultiple de la deuxième et de la quatrième grandeur.

Au cas (improbable [15]) où le lecteur n'aurait pas saisi ce dont il est question, je traduis cette définition en langage moderne :

Les rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égaux si pour tous $q, p \in \mathbf{N}$, on a $qa > pb \iff qc > pd$, $qa = pb \iff qc = pd$ et $qa < pb \iff qc < pd$.

Attention, *a priori*, les rapports ne sont pas nécessairement rationnels. Avec nos connaissances sur les réels, cela revient simplement à dire que si l'on avait, par exemple, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, on pourrait trouver un rationnel entre les

13. Notamment pour formuler le théorème de Thalès, les triangles semblables, etc.

14. Comme Platon le dit avec un brin de mépris : *Les calculateurs divisent, les savants multiplient.*

15. Je plaisante, mais on voit ici l'importance et la simplification qu'apportent les notations par rapport à la formulation initiale. Et encore, je n'ai pas pris la traduction la plus ancienne. Je répète que le point essentiel c'est qu'Euclide n'écrit pas les rapports et ne les considère pas comme des nombres.

deux, donc des entiers p, q tels que $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ et on aurait alors $qa < pb$ mais $qc > pd$ contredisant la définition d'Euclide.

5.2 Dans l'enseignement

Jusqu'à l'époque des mathématiques modernes, l'enseignement français reste dans la ligne d'Euclide. En particulier, on étudie la théorie des proportions, une proportion étant, par définition, l'égalité de deux rapports. Les rapports sont soit des rapports de nombres, soit des rapports de grandeurs, le plus souvent de même nature. À partir des années 1960, les grandeurs ont tendance à disparaître pour ne laisser subsister que les nombres.

5.2.1 Un exemple : le Monge-Guinchan de troisième de 1959

Un point a changé par rapport à Euclide : les rapports sont des nombres (dont on dit pas exactement la nature, sauf à partir des années 60 où on parle de réels). Voici ce que dit ce livre :

On dit que les nombres $a, b, c, \dots$ sont proportionnels aux nombres $a', b', c', \dots$ s'ils vérifient les égalités :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots = K$$

et K s'appelle coefficient de proportionnalité. L'un des premiers résultats énoncés est 3.3 vu ci-dessus, avec une variante avec la différence. L'un des exercices de base concerne les partages proportionnels.

Ensuite vient le produit en croix (on dit : *le produit des extrêmes est égal au produit des moyens*) et deux notions importantes : quatrième et moyenne proportionnelles.

Un peu plus loin, on aborde les grandeurs proportionnelles, **pas nécessairement de même nature** [16], avec la définition suivante :

On dit que deux grandeurs mesurables sont proportionnelles si, lorsqu'on multiplie (ou l'on divise) la mesure de l'une par $2, 3, 4, \dots$, la mesure correspondante de l'autre est multipliée (ou divisée) par $2, 3, 4, \dots$

On voit que, dans ce cas, on privilégie l'aspect homogène de la proportionnalité, mais il y a tout de suite un théorème qui assure que le rapport des mesures est constant, voir la proposition 2.1 qui caractérise les fonctions linéaires soit comme $f(x) = ax$ soit comme vérifiant $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Parmi les exemples les poids [17] et les volumes, la distance parcourue et le temps, etc.

16. Ce paragraphe disparaît dans le livre de la même collection de 1966.
17. On dirait aujourd'hui les masses.