La méthode de Cardan et les imaginaires

Daniel PERRIN

1 La méthode de Cardan

Il s'agit d'une méthode de résolution exacte des équations du troisième degré "par radicaux", analogue de la résolution de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ par la formule $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, mais qui fait intervenir des racines carrées et cubiques.

1.1 Réductions

Quitte à diviser par le coefficient de x^3, on peut supposer qu'on a une équation de la forme $x^3+ax^2+bx+c=0$, avec $a,b,c \in \mathbf{R}$. Si on effectue alors le changement d'inconnue [1] $X = x + \frac{a}{3}$, l'équation devient :

$$X^3 + \big(b - \frac{a^2}{3}\big)X + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27} = 0$$

qui est de la forme $X^3+pX+q=0$. On supposera désormais qu'on est dans ce cas.

1.2 La méthode de Cardan

On cherche donc les racines de $x^3+px+q=0$. L'astuce de Cardan [2] consiste à poser $x = u+v$ en introduisant deux inconnues au lieu d'une. L'intérêt – non évident *a priori* – est d'avoir un degré de liberté supplémentaire. L'équation devient alors :

$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0.$$

C'est ici que se révèle l'intérêt de l'astuce. Comme on a deux inconnues u, v, on peut leur imposer une relation supplémentaire, et ici, on va imposer $3uv+p=0$ (relation $(*)$), ce qui tue un des termes et il reste $u^3+v^3+q=0$. On constate alors qu'on connaît la somme $u^3+v^3=-q$ et le produit $u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$ grâce à $(*)$. Quand on a la somme S et le produit P de deux nombres, on sait qu'ils sont racines de l'équation du second degré $X^2-SX+P=0$. Ici, u^3 et v^3 sont donc racines de $X^2+qX-\dfrac{p^3}{27}$ (équation $(**)$).

---

1. Cela revient à faire apparaître le début d'un cube.
2. Il n'est pas évident que ce soit Cardan qui ait le premier trouvé cette méthode. D'autres noms circulent : Scipion del Ferro, Tartaglia et les controverses ont été sanglantes. Mais Cardan a eu le mérite de publier un traité *Ars Magna* qui rassemble tous les résultats connus à l'époque (1545).

On connaît donc u^3 et v^3, on extrait leurs racines cubiques u et v et on obtient x comme la somme $u+v$. Mais il faut parfois faire attention, voir section 2.

1.3 Quelques exemples

1.3.1 Un exemple avec une solution présentable

On résout l'équation x^3+6x+2. On trouve un discriminant 36 pour $(**)$ et la solution $x=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$.

1.3.2 Un exemple avec une solution particulièrement laide

Il s'agit de l'équation $x^3+3x-4=0$. On trouve, avec Cardan, la racine $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Belle formule, derrière laquelle se cache la solution évidente de l'équation, à savoir ... 1. (On comprend la raison de cette identité en notant que la racine cubique de $2+\sqrt{5}$ est dans $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$, c'est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$)

Cet exemple relativise l'intérêt de la méthode : les calculs auxquels elle conduit peuvent être parfois compliqués. De plus, pour avoir des valeurs approchées des solutions, il faut calculer des racines carrées ou cubiques, ce qui n'est pas forcément simple.

1.3.3 L'exemple de Newton

Appliquons la méthode à l'équation favorite de Newton : $x^3-2x-5=0$. L'équation qui donne u^3, v^3 est alors $X^2-5X+\frac{8}{27}=0$. Le discriminant de $(**)$ est $\Delta=25-\frac{32}{27}=\frac{643}{27}$ et on obtient :

$$u^3=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{643}}{6\sqrt{3}}, \quad v^3=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{643}}{6\sqrt{3}}.$$

On en déduit l'unique racine de l'équation donnée :

$$x=\sqrt[3]{\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{643}}{6\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{643}}{6\sqrt{3}}}.$$

On vérifie que l'on a $x\sim 2,09455148154$ comme le donne aussi la méthode (des tangentes) de Newton.

2 Le cas "irréductible" et l'introduction des imaginaires

2.1 Discussion

Ce qui précède s'applique sans modification lorsque le discriminant $\Delta=\frac{4p^3+27q^2}{27}$ de l'équation $(**)$ est positif qui correspond au cas où l'équation admet une unique racine réelle en vertu du lemme suivant [3] :

2.1 Lemme. *L'équation* $x^3 + px + q = 0$ *admet une unique racine réelle si et seulement si on a* $4p^3 + 27q^2 > 0$.

Démonstration. On étudie la fonction $f(x) = x^3 + px + q$, sa dérivée est $f'(x) = 3x^2 + p$. Si p est positif, on voit que f est croissante, donc a un unique zéro, et $4p^3 + 27q^2$ est bien > 0. Sinon, f est croissante jusqu'à $\alpha = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$, puis décroissante jusqu'à $\beta = \sqrt{-\frac{p}{3}}$, puis croissante. Elle admet un maximum relatif M en α et un minimum relatif m en β. Dire que l'équation a une seule racine réelle c'est dire que m et M sont de même signe, donc que le produit mM est > 0. Or, on a :

$$mM = \Big(q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\Big)\Big(q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\Big) = \frac{4p^3 + 27q^2}{27} = \Delta,$$

d'où le résultat.

On voit que, dans le cas $\Delta > 0$ où l'équation a une unique racine réelle, les choses se passent bien : l'équation $(**)$ a deux racines réelles u^3, v^3, chacune admet une unique racine cubique réelle u, v et on trouve $x = u + v$, unique racine de l'équation comme dans l'exemple ci-dessus.

2.2 Les imaginaires

En revanche, lorsque l'équation a 3 racines réelles, le discriminant Δ est négatif et l'équation $(**)$ n'a plus de solutions [4]. Plus de solutions ? Au moins dans les réels, car on peut faire le calcul de Cardan avec les complexes, et c'est d'ailleurs pour faire ce calcul qu'ils ont été inventés par Bombelli vers 1572. En fait, Bombelli introduit une sorte de signe supplémentaire à côté des signes plus (*piu*) et moins (*meno*), signe qu'il appelle *piu de meno* (plus de moins) et qui correspond en langage moderne à $i = \sqrt{-1}$. Il utilise aussi $-i$ appelé *meno de meno*.

En langage moderne, lorsque Δ est négatif, on trouve d'abord les deux racines u^3, v^3 de $(**)$, qui sont complexes conjuguées, puis on extrait leurs racines cubiques u, v. Attention, il y a deux difficultés ici. La première est de trouver vraiment ces racines. Nous y revenons plus bas. La seconde tient au fait que u^3 admet trois racines cubiques : u, ju, j^2u et de même pour v. Si on calcule toutes les sommes possibles de ces racines, on va trouver 9 valeurs pour x, ce qui est trop pour une équation de degré 3. En fait, il faut se souvenir ici qu'on a imposé la relation $uv = -\frac{p}{3}$, de sorte que si on effectue l'un des trois choix possibles pour u, l'autre valeur v est bien déterminée, donc aussi x. Précisément, on a $v = \overline{u}$. En effet, $uv = -p/3$ est réel donc $v = -\frac{p}{3u} = -\frac{p\overline{u}}{|u|^2}$ est de la forme $r\overline{u}$ avec r réel. Mais comme v^3 est conjugué de u^3, on a $v^3 = r^3\overline{u}^3 = \overline{u}^3$, on voit que r est égal à 1.

3. Bien entendu, à l'époque de Cardan on ne connaissait pas la dérivation, mais les gens savaient qu'une équation du troisième degré pouvait avoir une ou trois racines réelles.

4. On parle traditionnellement de "cas irréductible" de l'équation de degré 3 dans cette situation.

2.3 Un exemple à la mode des anciens

Pour convaincre de la valeur de leurs méthodes, les anciens utilisaient souvent des équations à solutions évidentes et nous allons les copier ici. Considérons donc l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$, qui admet les racines évidentes $1, 2, -3$ et appliquons lui la méthode de Cardan. L'équation $(**)$ est $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$, dont le discriminant est $\Delta = -\frac{400}{27}$. Les racines de $(**)$ sont $u^3 = -3 + \frac{10}{3\sqrt{3}}i$ et $v^3 = -3 - \frac{10}{3\sqrt{3}}i$ et il faut en extraire les racines cubiques. Comme on l'a dit, ce n'est pas si facile, voir paragraphe suivant. On trouve que les trois racines cubiques sont $u_1 = 1 + \frac{2i\sqrt{3}}{3}$, $u_2 = ju_1 = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{6}$ et $u_3 = ju_1 = \frac{1}{2} - \frac{5i\sqrt{3}}{6}\cdot$ Pour trouver les valeurs correspondantes de v, on utilise la relation $(*)$ $uv = \frac{7}{3}$, en notant que $7/3$ est exactement le carré du module des u_i, ce qui montre que les v_i sont leurs conjugués. On a donc $v_1 = \overline{u_1} = 1 - \frac{2i\sqrt{3}}{3}$ qui donne $x_1 = u_1 + v_1 = 2$, de même $v_2 = \overline{u_2}$, qui donne $x_2 = -3$ et enfin $v_3 = \overline{u_3}$ qui fournit $x_3 = 1$.

Inutile de dire qu'à l'époque de Bombelli, ce calcul (qui n'était évidemment pas formulé ainsi) passait pour magique et le nom d'imaginaires pour les nouveaux nombres en témoigne. Il faudra plus de 200 ans pour que le statut des nombres complexes soit clairement élucidé.

3 Racines cubiques

On a vu ci-dessus que la méthode de Cardan amène à extraire des racines cubiques de nombres complexes. Encore faut-il montrer que c'est possible et dire comment on le fait.

3.1 Existence

3.1 Proposition. *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Alors, z admet trois racines cubiques distinctes, w, jw et j^2w (où j est la racine cubique de 1 : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$).*

Démonstration. Dans les cours modernes sur les complexes on utilise en général la forme trigonométrique pour prouver ce résultat. Il faut bien comprendre que les anciens algébristes ne pouvaient procéder ainsi, puisque la représentation géométrique des complexes date du début XIX-ième avec Argand et Cauchy. Voici une méthode algébrique. On cherche w sous la forme $w = x + iy$. On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = a & (1) \\ 3x^2y - y^3 = b. & (2) \end{cases}$$

Supposons $b \neq 0$, sinon on est dans le cas réel, qui est connu. La relation $|w|^3 = |z|$ montre que x, y vérifient aussi $(x^2 + y^2)^3 = a^2 + b^2$. Soit c la racine cubique réelle (positive) de a^2+b^2. On doit avoir $x^2+y^2=c$, donc $y^2=c-x^2$. L'équation (1) donne une équation de degré 3 en x : $4x^3-3cx-a=0$ et cette équation admet une racine réelle x. La deuxième équation donne $y=\dfrac{b}{4x^2-c}$ (on vérifie que $4x^2-c$ est non nul, c'est la condition $b\neq 0$). On vérifie qu'on a bien $y^2=c-x^2$ et on en déduit le résultat.

3.2 Comment faire ?

On peut se demander comment Bombelli procédait pour trouver les racines cubiques de $-3+\dfrac{10i}{3\sqrt{3}}\cdot$ Je ne connais pas la réponse historique à cette question, mais je tente ci-dessous d'en donner une version plausible. On peut supposer qu'il cherchait les solutions, comme ci-dessus, sous la forme $w=x+iy$. On a alors le système :

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=-3 \quad (1) \\ 3x^2y-y^3=\dfrac{10}{3\sqrt{3}}\cdot \quad (2) \end{cases}$$

La méthode utilisée pour la preuve de 3.1 ne peut s'appliquer telle quelle : elle conduit à une équation du troisième degré, avec trois racines réelles et le serpent se mord la queue. Mon hypothèse est que, vu la forme de l'équation (2), Bombelli a cherché une solution avec $y=\dfrac{t}{\sqrt{3}}$, ce qui mène au système :

$$\begin{cases} x^3-xt^2=-3 \quad (3) \\ 9x^2t-t^3=10 \quad (4) \end{cases}$$

et j'imagine qu'il a cherché des solutions **entières** de ce système [5]. La première équation montre alors que x divise 3, et on a donc $x=\pm 1,\pm 3$. On vérifie que les cas $x=3,-3,-1$ ne donnent pas de solution entière pour t. Ainsi, par exemple, si on prend $x=3$, on a $27-3t^2=-3$ d'où $t^2=10$ qui n'a pas de solution rationnelle.

Il reste donc le cas $x=1$. On en déduit $t^2=4$, $t=\pm 2$ avec (3) et si l'on reporte dans (4) on trouve $t=2$. On obtient la solution $w=1+\dfrac{2i}{\sqrt{3}}\cdot$

Il y a bien une autre solution, mais je ne la retiens pas car elle n'est pas très honnête. Comme Bombelli était parti d'une équation à racines évidentes, il disposait d'un renseignement supplémentaire, par exemple : $2=u+v$, ce qui lui donnait d'emblée la partie réelle x de u et v (qui sont conjugués), à savoir $x=1$. Après, il ne restait plus qu'à déterminer y, ce qui est immédiat avec les équations (1) et (2).

5. En fait, si on cherche des solutions rationnelles, on peut mener un raisonnement analogue, quoique plus laborieux. En contrepartie, on trouve non seulement w, mais aussi jw et j^2w.