Résolution d'équations numériques

Daniel PERRIN

On présente ici trois méthodes de résolution d'équations : les méthodes de Newton, d'interpolation linéaire et, très brièvement, d'ajustement linéaire.

Pour des compléments sur ces questions on pourra consulter le livre de J.-L. Ovaert et J.-L. Verley, Analyse, Vol. 1, Cedic, Chapitre VI §2 (ce livre n'est plus disponible en librairie mais la bibliothèque en a quelques exemplaires).

1 Introduction

1.1 Les méthodes

Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 et supposons que f admette un zéro α entre a et b (c'est le cas si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires). Nous supposerons que α est le seul zéro de f dans $[a,b]$ (c'est le cas si f est monotone sur $[a,b]$ et on peut en général s'y ramener en restreignant l'intervalle $[a,b]$). Notre objectif est de décrire des algorithmes permettant de calculer la racine α. Pour cela, l'idée est de remplacer l'équation $f(x)=0$ par une équation équivalente du type $g(x)=x$ et d'utiliser une suite récurrente $x_{n+1}=g(x_n)$ dont on sait que, si elle converge, c'est vers un point fixe de g, donc un zéro de f, c'est-à-dire vers α.

Il existe toujours de telles fonctions g, par exemple $g(x)=f(x)+x$. On a même une certaine latitude sur g, on peut prendre, en effet : $g(x)=x+\mu f(x)$ avec $\mu \neq 0$, ou encore $g(x)=x+\mu(x)f(x)$ où μ est une fonction qui ne s'annule pas sur $[a,b]$. Dans tous ces cas on aura bien $f(x)=0 \Longleftrightarrow g(x)=x$.

Il reste à choisir le scalaire ou la fonction μ pour que la suite $x_{n+1}=g(x_n)$ converge effectivement vers α. On sait que cela est lié à la valeur de $g'(\alpha)$: si on a $|g'(\alpha)|>1$ la suite ne converge pas (sauf si elle est constante à partir d'un certain rang), si on a $|g'(\alpha)|<1$ elle converge (pourvu que x_0 soit assez voisin de α) et le meilleur choix est celui qui donne $g'(\alpha)=0$ et qui assure une convergence très rapide. Dans le cas présent, si on prend $g(x)=x+\mu f(x)$ on a $g'(\alpha)=1+\mu f'(\alpha)$, de sorte que le choix optimal serait de prendre $\mu=-\dfrac{1}{f'(\alpha)}\cdot$ On notera que ce choix n'est possible que si $f'(\alpha)$ est non nul, c'est-à-dire si α n'est pas racine double de l'équation. De plus, comme α est inconnu, ce choix est en général impraticable et on se contentera d'une valeur approchée. Il y a pour cela plusieurs solutions qui fournissent chacune des algorithmes de calcul de α :

1) Les méthodes d'ajustement linéaire consistent à prendre μ constant et non nul. Il y a deux variantes très voisines, en prenant $\mu=-1/\lambda$, donc $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{\lambda}$ avec $\lambda=f'(\beta)$ avec $\beta \in]a,b[$, le plus proche possible de α, ou $\lambda=\dfrac{f(\gamma)-f(\delta)}{\gamma-\delta}$ avec $\gamma,\delta \in]a,b[$, voisins de α, ce qui revient au même puisque, par le théorème des accroissements finis, il existe $\epsilon \in]\gamma,\delta[$ tel que $f(\gamma)-f(\delta)=(\gamma-\delta)f'(\epsilon)$.

2) La méthode de Newton est du premier type de 1) mais avec λ variable, $\lambda = f'(x)$: $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

3) Enfin, la méthode d'interpolation linéaire est du second type de 1) avec λ variable : $\lambda(x) = \dfrac{f(\gamma) - f(x)}{\gamma - x}$.

Les méthodes d'ajustement et d'interpolation linéaire donnent des convergences de type géométrique (i.e. en k^n avec $0 < k < 1$), celle de Newton donne une convergence rapide (i.e. en k^{2^n} avec $0 < k < 1$).

1.2 Le cadre

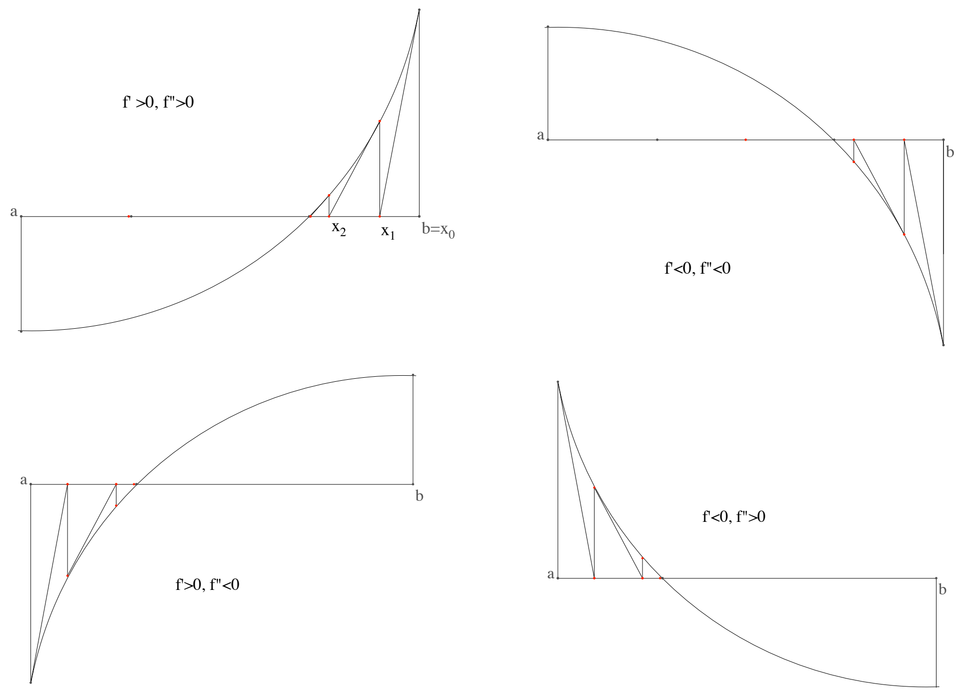
Pour simplifier, nous ferons les hypothèses suivantes :

1.1 Hypothèses et notations. *On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, de classe C^2, vérifiant les conditions suivantes :*
1) f' ne s'annule pas sur $[a, b]$, donc garde un signe constant, de sorte que f est monotone sur $[a, b]$.
2) $f(a)f(b)$ est < 0, de sorte que f admet un unique zéro α dans $]a, b[$.
3) f'' garde un signe constant sur $[a, b]$ (donc f est concave ou convexe).
La fonction $|f'|$ étant continue et non nulle sur $[a, b]$ admet une borne inférieure que nous noterons m'. La fonction $|f''|$ étant continue sur $[a, b]$ admet une borne supérieure que nous noterons M''.

1.2 *Remarques.*
1) On notera que les hypothèses ci-dessus peuvent toujours être réalisées en restreignant suffisamment l'intervalle $[a, b]$, sauf si on a $f'(\alpha) = 0$ (α racine double de f) ou $f''(\alpha) = 0$ (α point d'inflexion de f).
2) On peut toujours se ramener au cas où f' **et** f'' **sont positives**, c'est-à-dire où f est croissante et convexe. En effet, si f est croissante et concave (resp. décroissante et convexe, resp. décroissante et concave), il suffit de remplacer l'équation $f(x) = 0$ par $f_1(x) = 0$ (resp. $f_2(x) = 0$, resp $f_3(x) = 0$) avec $f_1(x) = -f(-x)$ (resp. $f_2(x) = f(-x)$, resp. $f_3(x) = -f(x)$).

2 La méthode de Newton

Comme on l'a dit, la méthode de Newton consiste, pour calculer α, à introduire la fonction : $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. L'interprétation géométrique de g est la suivante : on écrit la tangente au graphe de f en le point $(x, f(x))$, c'est la droite d'équation $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$ et on coupe cette droite par l'axe des x, $Y = 0$, on obtient alors $X = g(x)$ qui sera une valeur approchée de α. On réitère l'opération pour obtenir une suite x_n qui converge vers α, voir figures ci-dessous.



2.1 Théorème. *Soit $x_0 \in [a, b]$. On suppose que x_0 vérifie la condition*

$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \qquad \textit{(règle de Fourier).}$$

Alors, si on définit la suite (x_n) par la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$, la suite (x_n) est monotone, elle converge vers α et on a la majoration :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{2m'}{M''} \left(\frac{M''}{2m'} |x_0 - \alpha| \right)^{2^n}.$$

Démonstration. On peut supposer f' et f'' positives. On a alors $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et la règle de Fourier impose $f(x_0) > 0$, c'est-à-dire $x_0 > \alpha$.

2.2 Lemme. *L'intervalle $J = [\alpha, b]$ est stable par g et on a, pour $x \in J$, $g(x) \leq x$.*

Démonstration. Les fonctions f et f' étant positives sur J, on a déjà $g(x) \leq x \leq b$. Pour voir que g reste supérieur à α, on étudie la fonction $g(x) - \alpha = x - \alpha - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ ou encore la fonction $u(x) = (x - \alpha)f'(x) - f(x)$. On a $u'(x) = (x - \alpha)f''(x) \geq 0$, de sorte que u est croissante sur J. Comme elle s'annule en α, elle est positive, donc aussi $g(x) - \alpha$.

Comme J est stable par g, la suite (x_n) est bien définie et elle est est minorée par α. De plus, l'inégalité $g(x) \leq x$ montre qu'elle est décroissante. Elle est donc convergente, et sa limite est l'unique point fixe de g, qui est α.

Les majorations résultent du lemme suivant :

2.3 Lemme. *On suppose f', f'' positives. Pour $x \in [\alpha, b]$ on a $g(x) - \alpha \leq \dfrac{M''}{2m'}(x - \alpha)^2$.*

Démonstration. On a

$$g(x) - \alpha = (x - \alpha) - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{f'(x)(x - \alpha) - f(x)}{f'(x)}$$

et on majore cette fraction en minorant le dénominateur par m' et en majorant le numérateur $u(x) = f'(x)(x - \alpha) - f(x) + f(\alpha)$. On a $u'(x) = f''(x)(x - \alpha)$ et on majore $u(x) = u(x) - u(\alpha)$ ($u(\alpha)$ est nul car $f(\alpha)$ l'est) par la formule de la moyenne :

$$u(x) - u(\alpha) = \int_\alpha^x f''(t)(t - \alpha)dt \leq M'' \int_\alpha^x (t - \alpha)dt = M'' \frac{(x - \alpha)^2}{2}.$$

Le lemme 2.3 appliqué à x_{n-1} donne l'inégalité $x_n - \alpha \leq \dfrac{M''}{2m'} (x_{n-1} - \alpha)^2$ qui, par récurrence sur n, donne la formule annoncée :

$$x_n - \alpha \leq \Big(\frac{M''}{2m'}\Big)^{1+2+\cdots+2^{n-1}} (x_0 - \alpha)^{2^n}.$$

2.4 *Remarque.* Lorsque la quantité $(\frac{M''}{2m'}|x_0 - \alpha|)$ est < 1, la convergence de x_n vers α est une convergence rapide. On notera que, puisque x_n converge vers α, cette condition est réalisée pourvu qu'on remplace x_0 par x_n pour n assez grand. Dans la pratique, on constatera que la méthode de Newton converge avec une rapidité stupéfiante.

3 La méthode d'interpolation linéaire

Cette méthode porte de nombreux autres noms : méthode des cordes, de fausse position, de Lagrange, des parties proportionnelles. Pour simplifier, nous supposerons f' et f'' positives, ce qui implique f croissante, convexe et $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Le cas général est analogue, *mutatis mutandis.*

Nous aurons besoin de quelques propriétés des fonctions convexes :

3.1 Rappels. *On suppose f convexe, c'est-à-dire $f'' \geq 0$.*
1) La courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes, c'est-à-dire qu'on a, pour tout $c \in]a, b[$ et tout x dans $[a, b]$:

$$f(x) \geq f(c) + (x - c)f'(c).$$

2) Si x et y sont distincts, la pente $p(x, y) = p(y, x) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ est, pour y fixé (resp. pour x fixé), une fonction croissante de x (resp. de y).

Démonstration. 1) On étudie la différence $\delta(x) = f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)$.

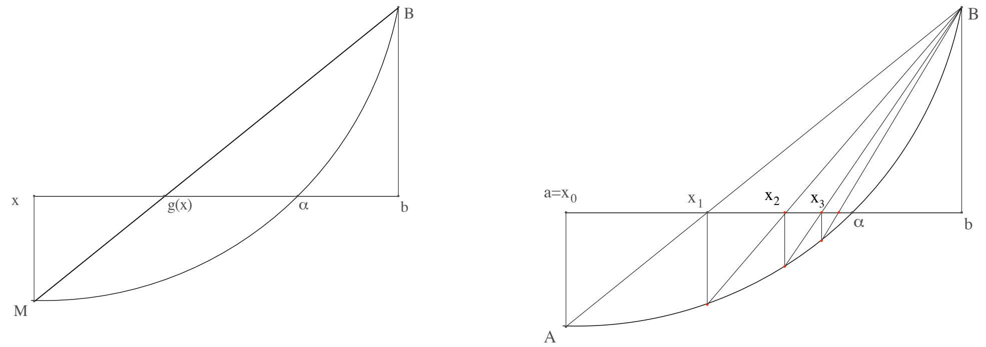
2) On se ramène au point 1) en dérivant $p(x, y)$ par rapport à x.

On considère les points $B = (b, f(b))$ et $M = (x, f(x))$ du graphe de f. La pente de la droite (MB) est $p(x, b)$ et on peut écrire l'équation de la droite (MB) sous la forme

$Y = f(x) + p(x,b)(X - x)$ ou $Y = f(b) + p(x,b)(X - b)$. Cette droite coupe l'axe des x au point $(g(x), 0)$ avec :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{p(x,b)} = b - \frac{f(b)}{p(x,b)}.$$

On obtient ainsi la valeur approchée $g(x)$ de α. On réitère l'opération pour obtenir une suite x_n qui converge vers α, voir figure ci-dessous.



3.2 Théorème. *On suppose f' et f'' positives. Soit $x_0 \in [a,b]$, $x_0 < \alpha$. La suite (x_n), définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$, est croissante, elle converge vers α et on a la majoration :*

$$|x_n - \alpha| \leq \left[1 - \frac{p(x_0,\alpha)}{p(\alpha,b)}\right]^n |x_0 - \alpha|.$$

Démonstration. On commence par un lemme :

3.3 Lemme. *L'intervalle $I = [a,\alpha]$ est stable par g et on a, pour $x \in I$, $g(x) \geq x$.*

Démonstration. Soit $x \in I$. On a $g(x) = x - f(x)\dfrac{b-x}{f(b)-f(x)}$, ce qui, comme f est négative sur I, montre $g(x) \geq x \geq a$.

Pour montrer $g(x) \leq \alpha$ on calcule $\alpha - g(x) = \dfrac{u(x)}{f(b)-f(x)}$, avec $u(x) = (\alpha - x)(f(b) - f(x)) + f(x)(b-x)$ et il s'agit de montrer que cette quantité est positive. On a $u'(x) = -f(b) + (b-\alpha)f'(x)$, donc $u''(x) = f''(x)(b-\alpha) \geq 0$. La fonction u' est donc croissante sur $[a,\alpha]$ et en α elle vaut $u'(\alpha) = -f(b) + (b-\alpha)f'(\alpha) = f(\alpha) - f(b) + (b-\alpha)f'(\alpha)$ qui est ≤ 0 en vertu de 3.1.1. Il en résulte que u est décroissante et, comme elle est nulle en α, elle est positive sur $[a,\alpha]$.

On peut alors revenir au théorème. Comme I est stable par g, la suite (x_n) est bien définie, majorée par α et croissante. Elle converge donc vers l'unique point fixe de g, à savoir α.

La majoration est obtenue par récurrence à partir du lemme suivant :

3.4 Lemme. *Pour $x \in [a,\alpha]$, on a $0 \leq \alpha - g(x) \leq (\alpha - x)\left[1 - \dfrac{p(x_0,\alpha)}{p(\alpha,b)}\right]$.*

Démonstration. Un calcul immédiat donne, en tenant compte de $f(\alpha) = 0$:

$$\alpha - g(x) = (\alpha - x)\left[1 - \frac{p(x,\alpha)}{p(x,b)}\right].$$

On obtient la majoration en minorant $p(x,\alpha)$ par $p(x_0,\alpha)$ et en majorant $p(x,b)$ par $p(\alpha,b)$ en vertu de 3.1.2.

3.5 *Remarque.* Lorsqu'on ne suppose plus f' et f'' positives, le choix de x_0 et celui de l'extrémité fixe des cordes dépendent de la monotonie et de la concavité de f. La règle est la suivante : on suppose que x_0 vérifie la condition $f(x_0)f''(x_0) < 0$. Soit e l'extrémité (a ou b) telle que α soit entre x_0 et e. On construit le point x_{n+1} comme intersection de la droite qui joint le point le point d'abscisse x_n de la courbe et le point $(e, f(e))$.

4 La méthode d'ajustement linéaire

Nous en donnons seulement un bref aperçu. On pose $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{\lambda}$ où λ est un scalaire non nul et on définit la suite (x_n) par récurrence, à partir de $x_0 \in [a,b]$, par $x_{n+1} = g(x_n)$. Attention, il faut vérifier que la suite est bien définie, c'est à dire que les x_n ne sortent pas de $[a,b]$.

On part d'un point $P_n = (x_n, f(x_n))$ du graphe de f. On trace la droite de pente λ passant par P_n qui a pour équation $y - f(x_n) = \lambda(x - x_n)$. Cette droite coupe l'axe des x au point d'abscisse x_{n+1}, cf. figure ci-dessous, avec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\lambda} = g(x_n).$$

Lorsqu'on itère ce procédé on trace donc des sécantes toutes de pente λ d'où le nom de méthode des sécantes parallèles donné parfois à cette méthode.

Pour fixer les idées supposons f' et f'' positives, donc f croissante et convexe. Comme le scalaire λ doit être le plus proche possible de $f'(\alpha)$, nous prendrons $\lambda > 0$. On sait que la monotonie de la suite (x_n) dépend du signe de $g'(\alpha)$. Ici, on a $g'(\alpha) = 1 - f'(\alpha)/\lambda$ et donc $g'(\alpha) > 0 \iff \lambda > f'(\alpha)$ et $g'(\alpha) < 0 \iff \lambda < f'(\alpha)$. On aura donc pour la suite (x_n) un comportement "en escalier" si et seulement si la pente λ est plus grande que la pente de la tangente au graphe de f en α et un comportement en "escargot" sinon.