# RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

Daniel PERRIN

Pour des compléments sur cette question on pourra consulter le livre de J.-L. Ovaert et J.-L. Verley, Analyse, Vol. 1, Cedic, Chapitre VI §2 .

## 0. Introduction.

Cette introduction est valable pour les trois méthodes présentées ci-dessous : la méthode de Newton, la méthode d'interpolation linéaire et celle d'ajustement linéaire.

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $C^1$ et supposons que $f$ admette un zéro $\alpha$ entre $a$ et $b$ (c'est le cas par exemple si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires). Nous supposerons que $\alpha$ est le seul zéro de $f$ dans $[a, b]$ (c'est le cas par exemple si $f$ est monotone sur $[a, b]$ et on peut en général s'y ramener en restreignant l'intervalle $[a, b]$). L'objectif est de calculer la racine $\alpha$ en produisant des algorithmes que l'on pourra implanter sur une calculette programmable ou un ordinateur. Pour cela, l'idée est de remplacer l'équation $f(x) = 0$ par une équation équivalente du type $g(x) = x$ et d'utiliser une suite récurrente $u_{n+1} = g(u_n)$ dont on sait que, si elle converge, c'est vers un point fixe de $g$, donc un zéro de $f$, c'est-à-dire vers $\alpha$. Cette méthode d'itération est très facile à programmer.
Il existe toujours de telles fonctions $g$, par exemple $g(x) = f(x) + x$. On a même une certaine latitude sur $g$, on peut prendre, en effet : $g(x) = x+\mu f(x)$ avec $\mu \neq 0$, ou encore $g(x) = x + \mu(x)f(x)$ où $\mu$ est une fonction qui est définie sur $[a, b]$ et qui ne s'y annule pas. Dans tous ces cas on aura bien $f(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = x$.
Il reste à choisir le scalaire ou la fonction $\mu$ pour que la suite $u_{n+1} = g(u_n)$ converge effectivement vers $\alpha$. On sait que cela est lié à la valeur de $g'(\alpha)$ : si on a $|g'(\alpha)| > 1$ la suite ne converge pas (sauf si elle est constante), si on a $|g'(\alpha)| < 1$ elle converge (pourvu que $u_0$ soit assez voisin de $\alpha$) et le meilleur choix est celui qui donne $g'(\alpha) = 0$ ce qui assure une convergence très rapide. Dans le cas présent, si on prend $g(x) = x + \mu f(x)$ on a $g'(\alpha) = 1 + \mu f'(\alpha)$, de sorte que le choix optimal serait de prendre $\mu = -\dfrac{1}{f'(\alpha)}$. On notera que ce choix n'est possible que si $f'(\alpha)$ est non nul, c'est-à-dire si $\alpha$ n'est pas racine double de l'équation. De plus, comme $\alpha$ est inconnu, ce choix est en général impraticable et on se contentera d'une valeur approchée.

Il y a plusieurs solutions qui fournissent des algorithmes de calcul de $\alpha$ :

1) Les méthodes d'ajustement linéaire consistent à prendre $\mu$ constant et non nul. Il y a deux variantes particulières très voisines, dans les deux cas on prend $\mu = -1/\lambda$, donc $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{\lambda}$ avec :

a) soit $\lambda = f'(\beta)$ avec $\beta \in ]a, b[$, le plus proche possible de $\alpha$,

b) soit $\lambda = \dfrac{f(\gamma) - f(\delta)}{\gamma - \delta}$ avec $\gamma, \delta \in ]a, b[$, voisins de $\alpha$,

ce qui revient au même puisque, par le théorème des accroissements finis, il existe $\epsilon \in ]\gamma, \delta[$ tel que $f(\gamma) - f(\delta) = (\gamma - \delta) f'(\epsilon)$.

2) La méthode de Newton est du type de 1.a mais avec $\lambda$ variable, $\lambda = f'(x)$ :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

3) Enfin, la méthode d'interpolation linéaire est du type de 1.b avec $\lambda$ variable :

$$\lambda(x) = \frac{f(\gamma) - f(x)}{\gamma - x}.$$

## 1. La méthode de Newton.

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction admettant un zéro $\alpha$ entre $a$ et $b$ (c'est le cas par exemple si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires). La méthode de Newton consiste, pour calculer $\alpha$, à introduire la fonction

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On voit qu'il faut supposer pour cela que $f$ est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas.
L'interprétation géométrique de $g$ est la suivante : on écrit la tangente au graphe de $f$ en le point $(x, f(x))$, c'est la droite d'équation $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$ et on coupe cette droite par l'axe des $x$, $Y = 0$, on obtient alors $X = g(x)$ qui sera une valeur approchée de $\alpha$, cf. figure 1.1. On réitère l'opération pour obtenir une suite $x_n$ qui converge vers $\alpha$, cf. théorème 3 et figure 1.2.

Pour simplifier, nous ferons ici des hypothèses plus fortes que celles qui sont strictement nécessaires :

**Hypothèses et notations 0.**
*On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, de classe $C^2$ vérifiant les conditions suivantes :*
*1) $f$ admet un unique zéro $\alpha$ dans $[a, b]$.*
*2) $f'$ ne s'annule pas sur $[a, b]$, donc garde un signe constant, de sorte que $f$ est monotone sur $[a, b]$.*
*3) $f''$ garde un signe constant sur $[a, b]$ (donc $f$ est concave ou convexe).*
*La fonction $|f'|$ étant continue et non nulle sur $[a, b]$ admet une borne inférieure que nous noterons $m'$. La fonction $|f''|$ étant continue sur $[a, b]$ admet une borne supérieure que nous noterons $M''$.*

*Remarque 1.* On notera que les hypothèses ci-dessus peuvent toujours être réalisées en restreignant suffisamment l'intervalle $[a, b]$, sauf si on a $f'(\alpha) = 0$ ($\alpha$ racine double de $f$) ou $f''(\alpha) = 0$ ($\alpha$ point d'inflexion de $f$).

**Lemme 2 : la relation fondamentale.**
*Soit* $x \in [a,b]$ *et posons* $y = g(x)$. *On a la formule*

$$(1) \qquad g(x) - \alpha = y - \alpha = \frac{(x-\alpha)^2}{2}\frac{f''(\theta)}{f'(x)} \qquad \text{avec } \theta \text{ compris entre } \alpha \text{ et } x.$$

*Si on a* $f(x)f''(x) > 0$, $y$ *est compris entre* $\alpha$ *et* $x$.

Attention, $\theta$ dépend de $x$, bien entendu !
*Démonstration.* On écrit, en tenant compte de $f(\alpha) = 0$,

$$g(x) - \alpha = (x-\alpha) - \frac{f(x) - f(\alpha)}{f'(x)}.$$

L'idée est alors de faire apparaître $f'(x)(x-\alpha)$ dans $f(x) - f(\alpha)$ en calculant $f(\alpha)$ par la formule de Taylor appliquée au point $x$ :

$$f(\alpha) = 0 = f(x) + (\alpha - x)f'(x) + \frac{(\alpha - x)^2}{2}f''(\theta), \quad \text{avec } \theta \text{ entre } \alpha \text{ et } x.$$

On en déduit aussitôt la formule annoncée.
Si on suppose $f(x)f''(x) > 0$, on voit que $y - x = -f(x)/f'(x)$ et $y - \alpha$, donné par la formule (1), sont de signes opposés (car $f''$ est de signe constant), ce qui implique que $y$ est entre $x$ et $\alpha$.

**Théorème 3.**
*Soit* $x_0 \in [a,b]$. *On suppose que* $x_0$ *vérifie la condition*

$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \qquad \text{(règle de Fourier).}$$

*Alors, si on définit la suite* $(x_n)$ *par la relation de récurrence* $x_{n+1} = g(x_n)$, *la suite* $(x_n)$ *est monotone, elle converge vers* $\alpha$ *et on a la majoration :*

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{2m'}{M''}\left(\frac{M''}{2m'}|x_0 - \alpha|\right)^{2^n}.$$

*Démonstration.* Montrons par récurrence sur $n$ que $x_n$ est entre $\alpha$ et $x_{n-1}$. C'est vrai pour $x_1$ par le lemme 2. Supposons que $x_n$ soit entre $\alpha$ et $x_{n-1}$. Comme $x_n$ est entre $x_0$ et $\alpha$ on a encore $f(x_n)f''(x_n) > 0$, donc, par le lemme 2, $x_{n+1}$ est entre $\alpha$ et $x_n$.
Il en résulte que $x_n$ est croissante et majorée par $\alpha$ (ou décroissante et minorée par $\alpha$), donc que $x_n$ converge vers un point fixe de $g$, c'est-à-dire un zéro de $f$, donc vers $\alpha$ qui est l'unique zéro de $f$ dans $[a,b]$.
La formule (1) du lemme 2 donne l'inégalité

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M''}{2m'}|x_{n-1} - \alpha|^2$$

qui, par récurrence sur $n$ donne

$$|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{M''}{m'}\right)^{1+2+\cdots+2^{n-1}}|x_0 - \alpha|^{2^n}$$

c'est-à-dire la formule annoncée.

*Remarques 4.*
1) On se reportera à la figure 1.3 pour le dessin des suites $x_n$ correspondant aux différents signes de $f'$ et $f''$.
2) Lorsque la quantité $(\frac{M''}{2m'}|x_0 - \alpha|)$ est $< 1$, la convergence de $x_n$ vers $\alpha$ est une convergence rapide. On notera que, puisque $x_n$ converge vers $\alpha$, la condition ci-dessus est réalisée pourvu qu'on remplace $x_0$ par $x_n$ pour $n$ assez grand. Dans la pratique, on constatera que la méthode de Newton converge avec une rapidité stupéfiante.

## 2. La méthode d'interpolation linéaire.

Cette méthode porte de nombreux autres noms : méthode des cordes, de fausse position, de Lagrange, des parties proportionnelles, ...

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction admettant un zéro $\alpha$ strictement compris entre $a$ et $b$. Pour $x, y \in [a, b]$, avec $x \neq y$, on pose

$$p(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = p(y, x).$$

Cette quantité est la pente de la droite qui joint les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.
La méthode d'interpolation linéaire consiste, pour calculer $\alpha$, à introduire la fonction

$$g_e(x) = x - f(x)\,\frac{e - x}{f(e) - f(x)} = x - \frac{f(x)}{p(x, e)}$$

où $e$ désigne l'une des extrémités $a$ ou $b$ du segment $[a, b]$. Cette fonction est définie si $f(x) \neq f(e)$ et son unique point fixe est $\alpha$.
L'interprétation géométrique de $g_b$ est la suivante : on considère les points $B = (b, f(b))$ et $M = (x, f(x))$ du graphe de $f$ et on écrit l'équation de la droite $MB$ :

$$\frac{X - x}{Y - f(x)} = \frac{b - x}{f(b) - f(x)}.$$

Cette droite coupe l'axe des $x$, $Y = 0$, au point $(g_b(x), 0)$. On obtient ainsi la valeur approchée $g_b(x)$ de $\alpha$, cf. figure 2.1. On réitère l'opération pour obtenir une suite $x_n$ qui converge vers $\alpha$.
Dans le cas de la variante $g_a$ on remplace $B$ par $A = (a, f(a))$.

Nous reprenons ici les hypothèses simplificatrices faites pour la méthode de Newton ($f$ a un unique zéro dans $]a, b[$, $f'$ et $f''$ sont de signe constant).

Le lemme suivant est immédiat en tenant compte de $f(\alpha) = 0$ :

**Lemme 1.**
*Soit $x \in [a, b]$. On a la formule*

$$g_e(x) - \alpha = (x - \alpha)\left[1 - \frac{p(x, \alpha)}{p(x, e)}\right]. \tag{1}$$

**Lemme 2.**
*Soit $x_0 \in [a, b]$. On suppose que $x_0$ vérifie la condition $f(x_0)f''(x_0) < 0$. Soit $e$*

*l'extrémité (a ou b) telle que $\alpha$ soit (strictement) compris entre $x_0$ et $e$. Soit $x$ strictement compris entre $\alpha$ et $x_0$. On a les inégalités :*

$$0 < 1 - \frac{p(x,\alpha)}{p(x,e)} < 1 - \frac{p(x_0,\alpha)}{p(\alpha,e)} < 1.$$

*Démonstration.* C'est essentiellement la convexité de $f$. Il faut distinguer quatre cas selon les signes de $f'$ et $f''$. On note d'abord que $f'$ est $> 0$ si et seulement si $p$ est $> 0$ (th. des accroissements finis). On montre ensuite que $f''$ est $> 0$ si et seulement si la fonction $p_x$ définie par $p_x(y) = p(x,y)$ est croissante. Supposons par exemple $f'' > 0$, on calcule la dérivée :

$$p'_x(y) = \frac{f'(y)(y-x) - f(y) + f(x)}{(y-x)^2}.$$

On pose $u(y) = f'(y)(y-x) - f(y) + f(x)$. On a $u'(y) = (y-x)f''(y)$ donc $u$ admet un minimum en $x$ et comme $u(x) = 0$, $u$ est $\geq 0$ et $p'_x(y)$ aussi.
Dans le cas où $f'$ et $f''$ sont $> 0$ on a $e = b$ et $x_0 \leq x < \alpha < b$ et les inégalités $p(x,\alpha) < p(x,b)$, $p(x,\alpha) > p(x_0,\alpha)$ et $p(x,b) < p(\alpha,b)$ donnent le résultat. Les autres cas sont analogues, cf. figure 2.2.

**Théorème 3.**
*Soit $x_0 \in [a,b]$. On suppose que $x_0$ vérifie la condition $f(x_0)f''(x_0) < 0$. Soit $e$ l'extrémité (a ou b) telle que $\alpha$ soit entre $x_0$ et $e$. Alors, si on définit la suite $(x_n)$ par la relation de récurrence $x_{n+1} = g_e(x_n)$, la suite $(x_n)$ est monotone, elle converge vers $\alpha$ et on a la majoration :*

$$|x_n - \alpha| \leq \left[1 - \frac{p(x_0,\alpha)}{p(\alpha,e)}\right]^n |x_0 - \alpha|. \tag{2}$$

*Démonstration.* Supposons $f'$ et $f''$ positifs, les autres cas sont analogues. On a alors $e = b$ et $x_0 < \alpha$. La formule (1) appliquée à $x = x_n$, jointe au lemme 2, montrent que $x_{n+1} - \alpha$ est du même signe que $x_n - \alpha$, donc que $x_n$ est $< \alpha$.
On a aussi $x_{n+1} - x_n = \dfrac{-f(x_n)}{p(x_n,b)}$. Mais comme on a $x_n < \alpha$, donc $f(x_n) < 0$, on en déduit que $x_n$ est croissante. Elle est donc convergente et sa limite, qui est un point fixe de $g_b$, donc un zéro de $f$ ne peut être que $\alpha$.
La formule (1) et le lemme 2 donnent aussi $|x_{n+1} - \alpha| \leq |x_n - \alpha| \left[1 - \dfrac{p(x_0,\alpha)}{p(\alpha,e)}\right]$ et on en déduit (2) par récurrence.

*Remarques 4.*
1) On se reportera à la figure 2.2 pour le dessin des suites $x_n$ correspondant aux différents signes de $f'$ et $f''$. On notera que la règle de choix de $x_0$ est l'inverse de la règle de Fourier.
2) Comme la quantité $1 - \frac{p(x_0,\alpha)}{p(\alpha,e)}$ est $< 1$ la convergence de la suite $(x_n)$ est géométrique.

## 3. La méthode d'ajustement linéaire.

Nous donnons cette méthode pour être complet, mais on verra qu'elle est un peu plus compliquée à justifier que les deux autres. Comme il n'y a plus de leçon de

CAPES qui impose de connaître tous les détails de cette méthode on pourra, dans un premier temps, se dispenser de lire les démonstrations.

On reprend les notations de l'introduction : $f$ est définie sur $[a,b]$, de classe $C^1$ et $f$ a un unique zéro $\alpha$ sur $[a,b]$. On pose $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{\lambda}$ où $\lambda$ est un scalaire non nul et on définit la suite $u_n$ par récurrence, à partir de $u_0 \in [a,b]$, par $u_{n+1} = g(u_n)$. Attention, il faut vérifier que la suite est bien définie, c'est à dire que les $u_n$ ne sortent pas de $[a,b]$, cf. figure 3.4.

*a) Interprétation géométrique.*

On part d'un point $P_n = (u_n, f(u_n))$ du graphe de $f$. On trace la droite de pente $\lambda$ passant par $P_n$ qui a pour équation $y - f(u_n) = \lambda(x - u_n)$. Cette droite coupe l'axe des $x$ au point d'abscisse $u_{n+1}$, cf. figure 3.1, avec

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{\lambda} = g(u_n).$$

Lorsqu'on itère ce procédé on trace donc des sécantes toutes de pente $\lambda$ d'où le nom de méthode des sécantes parallèles donné parfois à cette méthode.

*b) Monotonie et convergence.*

Nous supposerons désormais que $f$ est de classe $C^2$ et que $f'$ et $f''$ ne s'annulent pas sur $]a,b[$, donc gardent un signe constant. Pour fixer les idées **nous supposerons $f'$ et $f''$ positives**, donc $f$ croissante et convexe. En fait, on peut toujours se ramener à ce cas. En effet, si $f$ est croissante et concave (resp. décroissante et convexe, resp. décroissante et concave), il suffit de remplacer l'équation $f(x) = 0$ par $f_1(x) = 0$ (resp. $f_2(x) = 0$, resp $f_3(x) = 0$) avec $f_1(x) = -f(-x)$ (resp. $f_2(x) = f(-x)$, resp. $f_3(x) = -f(x)$), cf. figures 3.3.
Comme le scalaire $\lambda$ doit être le plus proche possible de $f'(\alpha)$, nous prendrons $\lambda > 0$. On sait que la monotonie de la suite $u_n$ dépend du signe de $g'(\alpha)$. Ici, on a $g'(\alpha) = 1 - f'(\alpha)/\lambda$ et donc $g'(\alpha) > 0 \iff \lambda > f'(\alpha)$ et $g'(\alpha) < 0 \iff \lambda < f'(\alpha)$. On aura donc pour la suite $u_n$ un comportement "en escalier" si et seulement si la pente $\lambda$ est plus grande que la pente de la tangente au graphe de $f$ en $\alpha$ et un comportement en "escargot" sinon.

Etudions déjà le cas de l'escalier :

**Proposition 1.**
*On suppose $\lambda > f'(\alpha)$.*
*1) Soit $u_0 \in [a,b]$ tel que $\alpha < u_0$ et tel que $f'(u_0) \leq \lambda$. Alors, la suite $u_n$ est bien définie, elle est décroissante et converge vers $\alpha$. On a $|u_n - \alpha| \leq |u_0 - \alpha|\, k^n$ avec $k = 1 - f'(\alpha)/\lambda$ et $0 < k < 1$.*
*2) Soit $u_0 \in [a,b]$ tel que $u_0 < \alpha$. Alors, la suite $u_n$ est bien définie, elle est croissante et converge vers $\alpha$. On a $|u_n - \alpha| \leq |u_0 - \alpha|\, k^n$ avec $k = 1 - f'(u_0)/\lambda$ et $0 \leq k < 1$.*

*Démonstration.* Notons déjà que, si la suite $u_n$ converge, c'est nécessairement vers $\alpha$ qui est l'unique zéro de $f$ sur $[a,b]$, donc l'unique point fixe de $g$. On a la relation

$$(*) \qquad u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{\lambda},$$

de sorte que la monotonie sera démontrée si on prouve qu'on a $u_n \geq \alpha$ dans le cas 1) (resp. $u_n \leq \alpha$ dans le cas 2)), et la convergence en résultera immédiatement. Or, on a, en tenant compte de $f(\alpha) = 0$ :

$$u_{n+1} - \alpha = u_n - \alpha - \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{\lambda}.$$

En vertu du théorème des accroissements finis, on a $f(u_n) - f(\alpha) = (u_n - \alpha)f'(c_n)$ avec $c_n \in ]\alpha, u_n[$ et on en déduit

$$(**) \qquad u_{n+1} - \alpha = (u_n - \alpha)\frac{\lambda - f'(c_n)}{\lambda} \qquad \text{avec} \quad c_n \in ]\alpha, u_n[.$$

Traitons d'abord le cas 2). On a $u_0 < \alpha$ et on montre, par récurrence sur $n$, qu'on a $u_n \leq \alpha$. En effet, si la propriété est vraie au rang $n$ on a $c_n \leq \alpha$ donc, puisque $f''$ est $\geq 0$, donc $f'$ croissante, on a $f'(c_n) \leq f'(\alpha) < \lambda$, donc, d'après $(**)$, $u_{n+1} \leq \alpha$. Traitons le cas 1). On a $u_0 > \alpha$ et $f'(u_0) \leq \lambda$. Montrons par récurrence sur $n$ qu'on a $\alpha \leq u_k \leq u_0$. Si cette relation vaut pour $k \leq n$, on a, d'une part, $f(u_n) \geq 0$, donc $u_{n+1} \leq u_n \leq u_0$ en vertu de la relation $(*)$. D'autre part, dans la relation $(**)$ on a $\alpha < c_n < u_n \leq u_0$, donc, puisque $f'$ est croissante, $f'(c_n) \leq f'(u_0) \leq \lambda$ et donc $u_{n+1} - \alpha$ est du signe de $u_n - \alpha$, c'est-à-dire $\geq 0$.

Enfin, les majorations de $|u_n - \alpha|$ résultent, par récurrence, de la formule $(**)$, en notant que l'on a $f'(c_n) \geq f'(\alpha)$ dans le premier cas et $f'(c_n) \geq f'(u_0)$ dans le second cas.

*Remarques 2.*
0) On note que la convergence de la suite est géométrique. Prenons $\lambda = f'(\beta)$, avec $\alpha \leq \beta$. Alors, dans le cas $u_0 > \alpha$, la convergence est d'autant plus rapide que $\beta$ est voisin de $\alpha$. On peut, par exemple, majorer $k$ par $M''(\beta - \alpha)/f'(\beta)$ où $M''$ est le maximum de $f''$ sur $[a, b]$. Dans le cas $u_0 < \alpha \leq \beta$, elle est d'autant plus rapide que $\beta - u_0$ est petit.
1) Si on prend $\lambda = f'(\beta)$, la condition $\lambda > f'(\alpha)$ signifie $\beta > \alpha$ et la condition $f'(u_0) \leq \lambda$ signifie $u_0 \leq \beta$.
2) Si on part d'un $u_0$ trop grand (i.e. si $f'(u_0) > \lambda$, par exemple si $u_0 > \beta$ dans le cas $\lambda = f'(\beta)$), la suite $u_n$ peut ne pas être définie.
3) Toujours dans le cas d'un $u_0$ trop grand, même si la suite est définie, on n'est pas assuré qu'elle reste au-dessus de $\alpha$, cf. figure 3.5.
4) On peut toutefois préciser ce qui se passe dans ces cas plus difficiles. En fait, la seule possibilité pour que $u_n$ ne soit pas définie est que le terme $u_1$ soit $< a$. En effet, sinon, il y a deux cas. Ou bien on a $a \leq u_1 \leq \alpha$ et on est dans le cas 2) de la proposition à partir du rang 1 de sorte que la suite est définie et converge vers $\alpha$. Ou bien on a $\alpha < u_1$ (et $u_1 \leq u_0$ en vertu de $(*)$) et ceci signifie que la pente de la sécante qui joint le point $P_0 = (u_0, f(u_0))$ au point $A = (\alpha, 0)$ est $\leq \lambda$. On montre alors par récurrence qu'on a, comme dans le cas 1), $\alpha \leq u_n \leq u_0$. En effet, supposons cette relation vraie au cran $n$. Alors, on a $u_{n+1} \leq u_n \leq u_0$ par $(*)$. De plus, comme $f$ est convexe, la pente $f(x) - f(\alpha)/(x - \alpha)$ est croissante et donc la pente de la droite $AP_n$ est plus petite que $\lambda$, de sorte qu'on a aussi $\alpha \leq u_{n+1}$. En définitive, la suite $u_n$ est définie et reste $\geq \alpha$, donc décroît et converge vers $\alpha$ et on a montré :

**Corollaire 3.**
*On suppose $f'$ et $f''$ positives, $\lambda > f'(\alpha)$ et $u_1 \geq a$. Alors, la suite $u_n$ est bien définie et elle converge vers $\alpha$.*

Nous passons maintenant au cas de l'escargot c'est-à-dire au cas $\lambda < f'(\alpha)$, cf. figure 3.2. Une condition nécessaire de convergence est que l'on ait $|g'(\alpha)| < 1$, ce qui signifie exactement $\lambda > f'(\alpha)/2$. On doit donc avoir, dans ce cas,

$$f'(\alpha)/2 < \lambda < f'(\alpha).$$

Il est plus difficile de donner un énoncé valable pour tous les $\lambda$ vérifiant cette condition. Nous allons nous contenter de préciser le cas où la dérivée $g'(x)$ vérifie, pour tout $x \in [a, b]$, la relation $-1 < g'(x) \leq 0$. Comme $g'(x) = 1 - f'(x)/\lambda$, ceci signifie qu'on a

$$(***) \qquad \frac{f'(b)}{2} < \lambda \leq f'(a).$$

Attention, pour réaliser cette condition, il faut en général rétrécir l'intervalle $[a, b]$ autour de $\alpha$. Quitte à rétrécir encore $[a, b]$ on peut supposer de plus $[a, b]$ stable par $g$ (on le remplace, au besoin, par l'intervalle $[a, g(a)] \cap [g(b), b]$ qui contient $\alpha$).

**Proposition 4.**
*On suppose que la condition $(***)$ est réalisée et que l'intervalle $[a, b]$ est stable par $g$. Alors, pour tout $u_0 \in [a, b]$ la suite $u_n$ est bien définie et converge vers $\alpha$. Si on a $u_0 < \alpha$ (resp. $u_0 > \alpha$) la suite $u_{2n}$ est croissante (resp. décroissante) et la suite $u_{2n+1}$ est décroissante (resp. croissante). On a $|u_n - \alpha| \leq |u_0 - \alpha|\, k^n$ avec $k = (f'(u_0)/\lambda) - 1$ si $u_0 > \alpha$ et $k = (f'(u_1)/\lambda) - 1$ si $u_0 < \alpha$, et, dans les deux cas, $0 < k < 1$.*

*Démonstration.* On a, pour tout $n$, $u_{n+1} - \alpha = (u_n - \alpha)g'(d_n)$ avec $d_n \in ]\alpha, u_n[$. Comme $g'$ est $\leq 0$ sur $[a, b]$, on voit que $u_n$ est alternativement $\geq \alpha$ et $\leq \alpha$. Comme $|g'(d_n)|$ est $\leq 1$, la distance à $\alpha$ de $u_n$ diminue, ce qui montre que les suites des termes pairs et impairs de $u_n$ sont monotones. La majoration de $u_n - \alpha$ résulte par récurrence sur $n$ de la relation $(**)$. On note en effet que $1 - f'(c_n)/\lambda$ est $\leq 0$ et, pour le minorer, on majore $f'(c_n)$ par $f'(u_0)$ ou $f'(u_1)$ selon la position de $u_0$ par rapport à $\alpha$. La relation $(***)$ assure qu'on a bien $k < 1$, donc que la suite $u_n$ converge vers $\alpha$.

*Remarques 5.*
0) Là encore, la convergence est géométrique et d'autant plus rapide que $\lambda$ est voisin de $f'(\alpha)$.
1) Si on ne suppose pas la condition $(***)$ réalisée, de nombreux phénomènes peuvent se passer. Un exemple simple mais intéressant pour les étudier est celui de la fonction $f(x) = x^2 - x$ sur l'intervalle $[0,5\,;\,2]$. On a $\alpha = 1$ et $f'(\alpha) = 1$. Comme $f$ est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier on peut définir $u_n$ sans restrictions.
a) Supposons d'abord $\lambda > f'(\alpha)/2 = 0,5$. Il se peut que la suite $u_n$ sorte de l'intervalle. C'est le cas si $\lambda = 0,51$ et $u_0 = 2$, on a $u_1 = -1,92$ et $u_n$ tend vers $-\infty$. C'est encore le cas si $\lambda = 0,51$ et $u_0 = 1,5$, mais là, $u_n$ revient dans l'intervalle et converge vers 1 : $u_1 = 0,029$, $u_2 = 0,08$, $u_3 = 0,23$, $u_4 = 0,59$, etc. Il se peut aussi que, bien que $\lambda$ soit $< f'(\alpha) = 1$, la suite ne soit alternée qu'au bout de quelques termes, par exemple, si $\lambda = 0,99$ et $u_0 = 0,5$ on a $u_1 = 0,75$, $u_2 = 0,94$, $u_3 = 0,997$ et, une fois que $u_n$ a dépassé $\lambda$ la suite est alternée et converge vers 1.
b) Si on prend $\lambda < f'(\alpha)/2 = 0,5$ et $u_0 \neq \alpha$, on sait que la suite $u_n$ ne converge pas vers $\alpha$. Avec $\lambda = 0,4$ il y a deux possibilités. Ou bien on part de l'un des points

fixes de la fonction $g^2 = g \circ g$, c'est-à-dire $0,6$ ou $1,2$ et la suite $u_n$ vaut alors alternativement $0,6$ et $1,2$, cf. figure 3.6. Ou bien on part d'un point "générique" de l'intervalle, par exemple $0,7$ et alors la suite a 4 valeurs d'adhérence qui sont les points fixes de $g^4$ et les suites $u_{4n}$, $u_{4n+1}$, $u_{4n+2}$, $u_{4n+3}$ convergent respectivement vers ces valeurs ($0,7012378944$ ; $1,2249961690$ ; $0,5359475562$ ; $1,157769892$), cf. figure 3.7.

## 4. Exemples.

Nous donnons quelques exemples traités avec les méthodes de Newton et d'ajustement linéaire.

*a) Approximer* $\sqrt{2}$.

On considère la fonction $x^2 - 2$ sur l'intervalle $[1,4\,;\,1,5]$. Son seul zéro est $\sqrt{2}$. Utilisons d'abord la méthode d'ajustement linéaire. Si on prend $\lambda = 2,8$ on a la relation $(***)$ et l'intervalle est stable par $g$. La suite $u_n$, de premier terme $u_0 = 1,5$ converge donc vers $\sqrt{2}$, en escargot, et on a $|u_n - \sqrt{2}| \leq k^n$ avec $k = f'(u_0)/\lambda - 1 \sim 0,071$. On a 10 décimales en 9 pas et on obtient $\sqrt{2} = 1,4142135623$.

Avec la méthode de Newton initialisée en $x_0 = 2$ on a le même résultat en 4 coups.

*b) Calcul de* $\sqrt[3]{2}$.

On considère la fonction $x^3 - 2$ sur l'intervalle $[1,2\,;\,1,3]$ et on applique la méthode d'ajustement linéaire avec $\lambda = 4$ et $u_0 = 1,3$. On a une convergence géométrique de l'ordre de $k^n$ avec $k \leq 0,267$ et on obtient $\sqrt[3]{2} = 1,2599210499$ en 13 pas.

Avec la méthode de Newton initialisée en $x_0 = 2$ on a le même résultat en 5 coups.

*c) Une équation du troisième degré.*

Posons $f(x) = x^3 - 3x + 1$ qui admet une racine $\alpha$ entre $0,3$ et $0,4$. On applique la méthode d'ajustement linéaire avec $\lambda = f'(0,3) = -2,73$, $u_0 = 0,3$ et on obtient $\alpha = 0,3472963553$ en 6 coups.

Avec la méthode de Newton initialisée en $x_0 = 0,3$ on a le même résultat en 3 coups.

*d) Une équation avec l'exponentielle.*

On pose $f(x) = e^{3x} - x - 30$. On vérifie que cette équation a une racine entre 1 et 2 et on a $f'(2) \sim 1209,28$. Un premier calcul de la méthode d'ajustement linéaire avec $\lambda = 1210$ et $u_0 = 2$ montre qu'on a $\alpha < 1,3$. On calcule alors $f'(1,3) \leq 148$ et on prend $\lambda = 148$ et $u_0 = 1,3$ qui donne $\alpha = 1,1462310818$ en 22 coups. Pour être sûr d'avoir $\alpha$ avec la précision voulue on peut alors refaire le calcul avec un $\lambda < f'(\alpha)$ qui donne une suite en escargot : si on prend $\lambda = 69$ et $u_0 = 1,146$ on a une suite qui encadre $\alpha$ et redonne la valeur ci-dessus en 17 pas.

Avec la méthode de Newton initialisée en $x_0 = 2$ on a le même résultat en 7 coups.