Un exercice sur la méthode de Newton

On suppose qu'on a montré que l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^3 - 2x - 5$ admet une unique racine α avec $2 < \alpha < 2,1$.

1) Écrire l'équation de la tangente T au graphe de f au point $(x, f(x))$. Montrer que T coupe l'axe des x au point d'abscisse $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

C'est mieux de le faire sous la forme générale pour réutiliser la méthode.

On considère la suite définie par récurrence par $u_0 = 2,1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

2) a) Interpréter graphiquement cette suite.

b) Calculer les premières valeurs de la suite à l'aide de la calculatrice. Quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie de la suite (u_n) et sur sa limite ?
La suite semble décroître et stationner à $2,0945514815$ *à partir de* u_3.

c) Montrer que, sur $I = [\alpha, +\infty[$, la fonction g est croissante et vérifie $g(x) \geq \alpha$. *On notera que cela montre que* I *est stable et donc que la suite* (u_n) *est bien définie.*

d) Montrer que l'on a $u_n > \alpha$ pour tout n, puis que (u_n) est décroissante.
Récurrence facile avec le c).

e) Montrer que (u_n) a une limite que l'on précisera.

f) En calculant $f(u_3 - 10^{-10})$ donner un encadrement de α à 10^{-10} près.

Les questions qui précèdent sont dans l'esprit du nouveau programme. On constate la puissance de la méthode. Dans la question suivante, plus difficile, on l'explique.

3) a) Montrer l'identité :

$$g(x) - \alpha = \frac{(x-\alpha)^2(2x+\alpha)}{3x^2-2}.$$

(On écrira $f(x) = f(x) - f(\alpha)$ et on mettra $(x - \alpha)$ en facteur dans cette expression.)

b) En déduire qu'on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,63\,|u_n - \alpha|^2$, puis, par récurrence, qu'on a

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{0,63} 0,063^{2^n}.$$

On a donc une convergence quadratique.

c) À partir de quel rang est-on sûr d'avoir $|u_n - \alpha| < 10^{-100}$?
La réponse est 7 et avec u_{10} *on a mille chiffres !*