Groupes et algèbres de Lie

Devoir maison

Ce devoir est à rendre pour le **lundi 7 avril à 8h15**, soit en personne lors du cours, soit par mail à l'adresse suivante :

daniel.monclair@universite-paris-saclay.fr

Ce devoir sera noté de façon non pénalisante : la note finale N_F sera calculée selon la formule

$$N_F = \max\left(N_E, \frac{N_E + N_{DM}}{3}\right)$$

où N_E est la note de l'examen final et N_{DM} est la note de ce devoir maison. Si vous rendez le devoir au plus tard le vendredi 4 avril, il sera corrigé et rendu le 7 avril.

Exercice 1 : Représentations de $\mathrm{U}(1)$ et $\mathbf{T}_d$

1. En identifiant $M_1(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}$, montrer que l'espace tangent $T_1\mathrm{U}(1)$ est égal à $i\mathbb{R}$ (faire un dessin).

   Solution : On a $\mathrm{U}(1) = f^{-1}(\{0\})$ avec $f(z) = |z|^2 - 1$, et $df|_{z=1} = dz + d\bar{z}$, d'où $T_1\mathrm{U}(1) = \ker df|_{z=1} = i\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'exponentielle complexe $e^{i\theta}$ coincide avec l'exponentielle de matrices $\exp(i\theta)$ de $i\theta \in \mathfrak{u}(1)$.

   Solution : La définition de l'exponentielle de matrices est $\exp(i\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$, elle coïncide bien avec l'exponentielle complexe car la somme et le produit de matrices 1×1 sont la somme et le produit de nombres complexes.

3. Pour $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$, on note

$$\rho_{\mathbf{k}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{U}(1) & \to & \mathrm{GL}_N(\mathbb{C}) \\ z & \mapsto & \begin{pmatrix} z^{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{k_N} \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

   Montrer que $(\mathbb{C}^N, \rho_{\mathbf{k}})$ est une représentation de $\mathrm{U}(1)$.

   Solution : Il suffit de vérifier que $\rho_{\mathbf{k}} \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ et que $\rho_{\mathbf{k}}(zz') = \rho_{\mathbf{k}}(z)\rho_{\mathbf{k}}(z')$ pour tous $z, z' \in \mathrm{U}(1)$.

4. À quelle condition $(\mathbb{C}^N, \rho_{\mathbf{k}})$ est-elle irréductible ?

   Solution : En notant e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^N$, le sous-espace vectoriel $\mathbb{C} \cdot e_1$ est une sous-représentation. Si $\rho_{\mathbf{k}}$ est irréductible, on a donc $\mathbb{C} \cdot e_1 = \mathbb{C}^N$, donc $N = 1$. Réciproquement, toute représentation de dimension 1 est irréductible.

5. Montrer que si (V, ρ) est une représentation irréductible de $\mathrm{U}(1)$, alors il existe $J \in \mathfrak{gl}(V)$ tel que $\rho(e^{i\theta}) = \exp(\theta J)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

   Solution : Comme $i \in \mathfrak{u}(1)$, on peut considérer $J = d\rho|_1 i \in \mathfrak{gl}(V)$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \rho(e^{i\theta}) &= \rho(\exp(\theta i)) \\ &= \exp(d\rho|_1 \theta i) \\ &= \exp(\theta J). \end{aligned}$$

   Remarque : on n'a pas utilisé le fait que (V, ρ) est irréductible.

6. Montrer que si $J \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ vérifie $\exp(2\pi J) = I_N$, alors J est diagonalisable et ses valeurs propres sont dans $i\mathbb{Z}$.
Indication : on pourra utiliser la forme réduite de Jordan.

   Solution : Si $\exp(2\pi J) = I_N$, alors tout bloc de Jordan $J_{\lambda,k}$ dans la forme réduit de J doit aussi vérifier $\exp(2\pi J_{\lambda,k}) = I_N$, or ceci n'est vrai que pour un bloc de taille 1 vérifiant $\lambda \in i\mathbb{Z}$.

7. En déduire une classification des représentations de $\mathrm{U}(1)$ à conjugaison près, ainsi qu'une classification de ses représentations irréductibles à conjugaison près.

   Solution : Soit (V,ρ) une représentation de $\mathrm{U}(1)$, et soit $J \in \mathfrak{gl}(V)$ donné par la question 5, i.e. tel que $\rho(e^i\theta) = \exp(\theta J)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\exp(2\pi J) = \rho(e^{2i\pi}) = \rho(1) = \mathrm{id}_V$, donc d'après la question 6, on peut choisir une base $\mathcal{B}$ de V dans laquelle

$$[J]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} ik_1 & & \\ & \ddots & \\ & & ik_N \end{pmatrix}$$

   Il en suit que $[\rho(e^{i\theta})]_{\mathcal{B}} = \rho_{\mathbf{k}}(e^{i\theta})$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, donc ρ est conjuguée à $\rho_{\mathbf{k}}$.
   Si ρ est irréductible, alors $\rho_{\mathbf{k}}$ aussi, donc $N = 1$.

8. Une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(1)$ vient-elle d'une représentation du groupe $\mathrm{U}(1)$?

   Solution : Non. Par exemple pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'application $R_k : i\theta \mapsto ki\theta$ définit une représentation $(\mathbb{C}, R_k)$ de $\mathfrak{u}(1)$, mais celle-ci ne vient d'une représentation de $\mathrm{U}(1)$ que lorsque $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble

$$\mathbf{T}_d = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{it_d} \end{pmatrix} \middle| t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R} \right\}.$$

9. Montrer que $\mathbf{T}_d$ est un sous-groupe de Lie matriciel de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$.

   Solution : C'est un sous-groupe compact donc fermé.

10. Décrire son algèbre de Lie.

    Solution :

$$T_{\mathbf{1}_N}\mathbf{T}_d = \left\{ \begin{pmatrix} it_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & it_d \end{pmatrix} \middle| t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R} \right\}.$$

11. Montrer que si (V,ρ) est une représentation irréductible de $\mathbf{T}_d$, alors $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$.

    Solution : Pour $k \in \{1, \ldots, d\}$, posons J_k la matrice $J^k = \mathrm{Diag}(0, \ldots, 0, i, 0, \ldots, 0)$ où le coefficient i est en position k, ainsi

$$\begin{pmatrix} it_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & it_d \end{pmatrix} = it_k J^k.$$

    Posons maintenant $J^k_\rho = d\rho|_{\mathbf{1}_d} J^k$. On a donc $\exp(2\pi J^k_\rho) = \rho(\exp(2\pi J^k)) = \mathrm{Id}$, et d'après la question 6. on sait que J^k_ρ est diagonalisable. Or les applications linéaires $J^1_\rho, \ldots, J^d_\rho$ commutent entre elles deux à deux (car $[J^k_\rho, J^l_\rho] = d\rho_{\mathbf{1}_d}[J^k, J^l] = 0$), elles sont donc diagonalisables dans une base commune $\mathcal{B}$:

$$[J^k_\rho]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda^k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^k_N \end{pmatrix}.$$

En notant $g = \mathrm{Diag}(e^{it_1}, \ldots, e^{it_d})$, on trouve

$$[\rho(g)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} e^{it_k\lambda^k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{it_k\lambda^k_N} \end{pmatrix}.$$

Là encore, le sous-espace $\mathbb{C}\cdot e_1$ est une sous-représentation, donc une représentation irréductible est de dimension 1.

Exercice 2 : SO(4) et $SU(2)\times \mathrm{SU}(2)$

On considère le groupe formé de matrices diagonales par blocs

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \middle| g_1, g_2 \in \mathrm{SU}(2) \right\} \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}).$$

1. Expliquer pourquoi G est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$.

   Solution : C'est un sous-groupe compact, donc fermé.

On considère le sous-ensemble

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a-ib \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Pour $g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \in G$ et $Q \in \mathbb{H}$, on note $\rho(g)\cdot Q := g_1 Q g_2^{-1}$.

2. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel réel de dimension 4 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

   Solution : Il possède comme base

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que si $g \in G$ et $Q \in \mathbb{H}$, alors $\rho(g)\cdot Q \in \mathbb{H}$.

   Solution : Remarquons d'abord que $\mathrm{SU}(2) \subset \mathbb{H}$ (car tout élément $g \in \mathrm{SU}(2)$ s'écrit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{C}$ vérifient $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Il suffit maintenant de vérifier que $\mathbb{H}$ est stable par produit matriciel. Ceci découle des calculs suivants :

$$\mathbf{1}^2 = \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{1} ; \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}.$$

4. Montrer que $(\mathbb{H}, \rho)$ est une représentation réelle de G.

Solution : On considère $g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} g_1' & 0 \\ 0 & g_2' \end{pmatrix} \in G$. Pour $Q \in \mathbb{H}$, on a :

$$\begin{aligned} \rho(gg') \cdot Q &= (g_1 g_1')Q(g_2 g_2')^{-1} \\ &= g_1\left(g_1' Q (g_2')^{-1}\right)g_2^{-1} \\ &= g_1 \rho(g') \cdot Q g_2^{-1} \\ &= \rho(g)\rho(g') \cdot Q. \end{aligned}$$

5. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{H}$ tel que $\langle Q, Q \rangle = \det Q$ pour tout $Q \in \mathbb{H}$.

   Solution : Il suffit de remarquer que $\det \begin{pmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a-ib \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, l'existence et l'unicité viennent par polarisation.

6. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{H}$ pour le produit scalaire défini à la question précédente. Pour $g \in G$, on note $\rho_{\mathcal{B}}(g) := [\rho(g)]_{\mathcal{B}}$. Montrer que $\rho_{\mathcal{B}}(g) \in \mathrm{O}(4)$ pour tout $g \in G$.

   Solution : Notons $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Pour $v \in \mathbb{R}^4$, on considère la matrice $Q_v = v^j x_j$.

$$\begin{aligned} \|\rho_{\mathcal{B}}(g)v\|^2 &= \det\left(\rho(g) \cdot Q_v\right) \\ &= \det\left(g_1 Q_v g_2^{-1}\right) \\ &= \det\left(g_1\right)\det(Q_v)\det\left(g_2^{-1}\right) \\ &= \det(Q_v) \\ &= \|v\|^2. \end{aligned}$$

   On en déduit que $\rho_{\mathcal{B}}(g) \in \mathrm{O}(4)$.

7. En déduire un isomorphisme entre les algèbres de Lie $\mathfrak{u}(2) \oplus \mathfrak{u}(2)$ et $\mathfrak{so}(4)$.

   Solution : Il y a une erreur d'énoncé, c'est une isomorphisme entre $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(4)$ que l'on cherche. On considère l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) & \to & \mathfrak{so}(4) \\ (X_1, X_2) & \mapsto & d\rho_{\mathcal{B}}|_{\mathbf{1}_4} \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

   Il s'agit bien d'un morphisme d'algèbres de Lie. Notons $X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$. Si $\Phi(X) = 0$, alors $d\rho|_{\mathbf{1}_4} X = 0$, i.e. $X_1 Q - Q X_2 = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{H}$. En appliquant ceci à $Q = \mathbf{1}$, on trouve $X_1 = X_2$. Puis $Q = \mathbf{i}$ montre que X_1 est diagonale, en continuant avec $Q = \mathbf{j}$ et $Q = \mathbf{k}$ on trouve $X = 0$, donc Φ est injective. Or $\dim \mathfrak{so}(4) = 6 = \dim \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, donc Φ est bien un isomorphisme.