Mathématiques
Université Paris-Sud

Feuille 6 - Corrections

Groupes et géométrie
M2 AAG 2019–2020

Exercice 1. Actions de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en dimension 1 et 2.

1. On peut considérer l'action par homographies : la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ agit sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Cette action est transitive, le stabilisateur est $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$.

2. (a) Il suffit de montrer qu'elle n'est pas abélienne. Or il n'y a pas d'algèbre abélienne de dimension 2 dans $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

   (b) On sait que $\mathfrak{h}$ est engendrée par X, Y qui vérifient $[X, Y] = Y$. En particulier 1 est valeur propre de ad (X). En regardant les trois cas possibles pour X à conjugaison près (hyperbolique, parabolique ou elliptique), on voit que X est conjuguée à la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Cette même conjugaison envoie Y sur un multiple de E.

   (c) Quitte à remplacer x par son image par un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on peut supposer que $\mathfrak{h} = \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$. Il en suit que la composante connexe de $\mathrm{Stab}(x)$ est $\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R})$, donc $M \approx \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{Stab}(x)$ est revêtu par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\,\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R}) \approx S^1$. En particulier M est compacte, donc difféomorphe à S^1.

3. Si l'action est non triviale, elle possède une orbite M de dimension 1. D'après la question précédente, M est difféomorphe à S^1, or S^1 n'a pas de sous-ensemble propre qui lui est homéomorphe.

4. Comme précédemment, toute orbite non triviale est un cercle, or la droite ne contient pas de sous-ensemble homéomorphe au cercle.

5. (a) Tout $X \in \mathfrak{g}$ induit un champ de vecteur $\overline{X}$ sur S^2 défini par $\overline{X}(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(tX)x$. Si $\overline{X}(x) = 0$, alors $X \in \mathfrak{g}_x$ (où $\mathfrak{g}_x$ est l'algèbre de Lie du stabilisateur de x). Comme tout champ de vecteurs sur S^2 s'annule, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on peut trouver $x \in S^2$ tel que $X \in \mathfrak{g}_X$.

   (b) Si l'action est transitive, les stabilisateurs sont conjugués, donc les algèbres de Lie des stabilisateurs sont conjuguées, et de dimension 1. Ceci est absurde car H (hyperbolique) ne peut pas être conjugué à un multiple de E (parabolique).

Exercice 2. Trivialité de fibrés vectoriels

1. (a) Pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on a $s(\mathbb{R}v) \in \mathbb{R}v$, donc il existe un unique $t(v) \in \mathbb{R}$ tel que $s(\mathbb{R}v) = t(v)v$. Si s ne s'annule pas, alors t non plus. En fixant un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, on a $t(v) = \frac{\langle s(\mathbb{R}v)|v\rangle}{\langle v|v\rangle}$, ce qui montre que t est continue.

   (b) Une section non nulle ne peut pas exister : on aurait $t(-v) = -t(v)$, or l'image de t est un connexe de $\mathbb{R}^*$, ce qui est absurde.

2. S^3 est difféomorphe à $\mathrm{SU}(2)$, et le fibré tangent d'un groupe de Lie est trivial.

3. On fixe h une métrique euclidienne sur E. On définit le sous-fibré F de E par $F_x = s(x)^\perp$. L'application $(v, t) \mapsto v + ts(x)$ de $F_x \times \mathbb{R}$ dans E_x définit un isomorphisme entre $F \oplus \varepsilon$ et E.

4. On définit $\Phi : M \times \mathbb{R} \to \mathrm{End}(\xi)$ par $\Phi(x, t)(v) = tv$ pour $v \in \xi_x$. C'est un isomorphisme entre fibrés vectoriels.

5. Le fibré tangent TM est un fibré vectoriel : il est trivial si et seulement si il possède n sections linéairement indépendantes.
   Le fibré des repères $\mathcal{R}M$ est un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-fibré principal : il est trivial si et seulement si il possède une section. Or une section de $\mathcal{R}M$ est la donnée d'une base de T_xM en tout point, donc n sections de T_xM qui sont linéairement indépendantes.
   La trivialité des ces fibrés est donc équivalente.

Exercice 3. La fibration de Hopf

Pour montrer que p est à valeurs dans S^2, il faut calculer $|2z\overline{w}|^2 + (|z|^2 - |w|^2)^2 = 1$.
Un calcul montre que $p(z,w) = p(z',w')$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$ qui satisfait $(p',w') = (\lambda p, \lambda w)$. Ceci permet de montrer que p est la projection d'un S^1-fibré principal (donc une fibration).
L'action de $\mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{CP}^1$ est transitive, et a pour stabilisateur le groupe $\left\{ \left(\begin{array}{cc} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{array} \right) \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\} \approx S^1$. La projection $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(2)/S^1 \approx \mathbb{CP}^1$ s'identifie à la fibration de Hopf via le difféomorphisme canonique entre S^3 et $\mathrm{SU}(2)$ (qui envoie $(a,b) \in S^3$ sur $\left(\begin{array}{cc} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{array} \right)$).