Mathématiques
Université Paris-Sud

Feuille 10 (correction)

Groupes et géométrie
M2 AAG 2019–2020

Exercice 2. Courbure sectionnelle conforme et laplacien.

1. $\varphi > 0$
2. On peut soit utiliser la formule donnant $g(\nabla_X Y, Z)$, soit montrer que la formule donnée définit une connexion sans torsion pour laquelle g' est parallèle.
3. On trouve $\nabla'_{\partial_x}\partial_x = \frac{\partial\sigma}{\partial x}\partial_x - \frac{\partial\sigma}{\partial y}\partial_y = -\nabla'_{\partial_y}\partial_y$ et $\nabla'_{\partial_x}\partial_y = \nabla'_{\partial_y}\partial_x = \frac{\partial\sigma}{\partial y}\partial_x + \frac{\partial\sigma}{\partial x}\partial_y$. Ceci permet de calculer les symboles de Christoffel :
$$\Gamma^1_{1,1} = -\Gamma^1_{2,2} = \Gamma^2_{1,2} = \frac{\partial\sigma}{\partial x}$$
$$\Gamma^2_{2,2} = -\Gamma^2_{1,1} = \Gamma^1_{1,2} = \frac{\partial\sigma}{\partial y}$$
4. $K = -e^{-2\sigma}\Delta\sigma$
5. Vient de $e^{2\sigma(x,y)} = \frac{1}{y^2}$ et de la question précédente.

Exercice 3. Courbure sectionnelle et longueur des petits cercles.

1. Les courbes $r \mapsto H(r,\theta)$ sont des géodésiques, ce qui fait de J_θ le vecteur variation d'une variation par géodésiques, donc un champ de Jacobi.
2. Remarquons d'abord que la formule est équivalente à $\|J_\theta(r)\|^2 = r^2(1 - \frac{K(P)}{3}r^2 + o(r^2))$.
On note $u_\theta = \cos(\theta)u + \sin(\theta)v$ et $v_\theta = -\sin(\theta)u + \cos(\theta)v$. On a ainsi $H(r,\theta) = \exp_x(ru_\theta)$.
Notons enfin c_θ la courbe définie par $c_\theta(r) = H(r,\theta)$. C'est donc la géodésique de vecteur initial $\dot c_\theta(0) = u_\theta$.

On commence par remarquer que $J_\theta(0) = 0$ car $H(0,\theta) = x$ pour tout θ. On a vu en cours (sans démonstration) que $\nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta(0) = v_\theta$ (car $J_\theta(r) = T_{ru_\theta}\exp_x(rv_\theta)$). Ce calcul se fait facilement en coordonnées : $\nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta = \frac{d}{dr}J_\theta + \Gamma(\dot c_\theta, J_\theta)$ (où Γ est le tenseur de Chritstoffel). Comme $J_\theta(0) = 0$, on en déduit :
$$\nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta(0) = \frac{\partial^2 H}{\partial r\partial\theta}(0,\theta) = \frac{du_\theta}{d\theta} = v_\theta$$
On a $\frac{d}{dr}\|J_\theta(r)\|^2 = 2g(J_\theta, \nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta)$.
On trouve donc $\frac{d}{dr}\big|_{r=0}\|J_\theta\|^2 = 0$.

On dérive à nouveau (et on utilise le fait que J_θ est un champ de Jacobi) :
$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dr^2}\|J_\theta\|^2 &= 2g(\nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta, \nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta) + 2g(J_\theta, \nabla_{\frac{d}{dr}}\nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta)\\ &= 2\|\nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta\|^2 - 2g(R(J_\theta,\dot c_\theta)\dot c_\theta, J_\theta)\\ &= 2\|\nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta\|^2 - 2R(J_\theta,\dot c_\theta,\dot c_\theta,J_\theta)\end{aligned}$$
On trouve donc $\frac{d^2}{dr^2}\Big|_{r=0}\|J_\theta\|^2 = 2\|v_\theta\|^2 - 2R(0,u_\theta,u_\theta,0) = 2$.

Pour aller plus loin, il faut pouvoir dériver l'expression $R(J_\theta,\dot c_\theta,\dot c_\theta,J_\theta)$. Il y a deux façons de procéder.

Première approche : calcul en coordonnées
On se place en coordonnées afin d'écrire :
$$R(J_\theta,\dot c_\theta,\dot c_\theta,J_\theta) = \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k,l}(c_\theta(r))J^i_\theta(r)\dot c^j_\theta(r)\dot c^k_\theta(r)J^l_\theta(r)$$

Comme la dérivée de $R_{i,j,k,l}(c_\theta(r))$ est $\sum_m \partial_m R_{i,j,k,l}(c_\theta(r))\dot{c}_\theta^m(r)$, on pose dR le tenseur de type $(5,0)$ défini (en coordonnées) par :

$$dR(V,W,X,Y,Z) = \sum_{i,j,j,l,m} \partial_m R_{i,j,k,l} V^m W^i X^j Y^k Z^l$$

Si X, Y, Z, W sont des champs de vecteurs le long de c_θ, on a :

$$\frac{d}{dr} R(X,Y,Z,W) = R(\dot{X},Y,Z,W) + \cdots + R(X,Y,Z,\dot{W}) + dR(\dot{c}_\theta, X, Y, Z, W).$$

On peut appliquer cette formule, mais elle a un grand défaut : les dérivées apparaissant ici sont les dérivées en coordonnées. En particulier, $\ddot{c}_\theta \neq 0$, on ne peut donc pas simplifier en utilisant $\nabla_{\frac{d}{dr}} \dot{c}_\theta = 0$. Pour contourner ce problème, on peut remplacer dR par le tenseur D défini par :

$$D(V,W,X,Y,Z) = dR(V,W,X,Y,Z) - R(\Gamma(V,W),X,Y,Z) - \cdots - R(W,X,Y,\Gamma(X,Z).$$

Ici Γ est le tenseur de Christoffel. Ainsi, si X est un champ de vecteurs le long de c_θ, on a $\nabla_{\frac{d}{dr}} X = \dot{X} + \Gamma(\dot{c}_\theta, X)$. On obtient donc la formule suivante, pour des champs de vecteurs X, Y, Z, W le long de c_θ :

$$\frac{d}{dr} R(X,Y,Z,W) = R(\nabla_{\frac{d}{dr}} X,Y,Z,W) + \cdots + R(X,Y,Z,\nabla_{\frac{d}{dr}} W) + D(\dot{c}_\theta, X, Y, Z, W).$$

Deuxième approche : dérivée covariante de R

En fait, le tenseur D défini ci-dessus ne dépend pas des coordonnées, puisque $D(V,W,X,Y,Z) = (\nabla_V R)(W,X,Y,Z)$, où ∇ est ici la connexion induite sur les tenseurs de type $(4,0)$ (c'est la définition de cette connexion).

On peut maintenant reprendre les calculs :

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dr^3}\|J_\theta\|^2 = 4g(\nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta, \nabla_{\frac{d}{dr}}\nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta) &- 2R(\nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta, \dot{c}_\theta, \dot{c}_\theta, J_\theta) - 2R(J_\theta, \nabla_{\frac{d}{dr}} \dot{c}_\theta, \dot{c}_\theta, J_\theta) \\
&- 2R(J_\theta, \dot{c}_\theta, \nabla_{\frac{d}{dr}} \dot{c}_\theta, J_\theta) - 2R(J_\theta, \dot{c}_\theta, \dot{c}_\theta, \nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta) \\
&- 2D(\dot{c}_\theta, J_\theta, \dot{c}_\theta, \dot{c}_\theta, J_\theta) \\
= 4R(\dot{c}_\theta, J_\theta, \dot{c}_\theta, \nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta) &- 2R(\nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta, \dot{c}_\theta, \dot{c}_\theta, J_\theta) - 2R(J_\theta, \dot{c}_\theta, \dot{c}_\theta, \nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta) \\
&- 2D(\dot{c}_\theta, J_\theta, \dot{c}_\theta, \dot{c}_\theta, J_\theta)
\end{aligned}$$

Grâce aux symétries du tenseur de Riemann, on trouve :

$$\frac{d^3}{dr^3}\|J_\theta\|^2 = 8R(\dot{c}_\theta, J_\theta, \dot{c}_\theta, \nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta) - 2D(\dot{c}_\theta, J_\theta, \dot{c}_\theta, \dot{c}_\theta, J_\theta).$$

Comme $J_\theta(0) = 0$, ceci nous donne $\left.\frac{d^3}{dr^3}\right|_{r=0} \|J_\theta\|^2 = 0$.

On dérive une dernière fois, cette fois-ci seulement en $r = 0$. Puisque $J_\theta(0) = 0$, la plupart des termes s'annulent (en particulier tous ceux faisant intervenir D ou sa dérivée ∇D) :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^4}{dr^4}\right|_{r=0} \|J_\theta\|^2 &= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} 8R(\dot{c}_\theta, J_\theta, \dot{c}_\theta, \nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta) \\
&= 8R(\dot{c}_\theta(0), \nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta(0), \dot{c}_\theta(0), \nabla_{\frac{d}{dr}} J_\theta(0)) \\
&= 8R(u_\theta, v_\theta, u_\theta, v_\theta) \\
&= -8R(u_\theta, v_\theta, v_\theta, u_\theta) \\
&= -8K(P).
\end{aligned}$$

La formule de Taylor-Young nous donne :

$$\begin{aligned}
\|J_\theta(r)\|^2 &= \|J_\theta(0)\|^2 + r\left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0}\|J_\theta\|^2 + \frac{r^2}{2}\left.\frac{d^2}{dr^2}\right|_{r=0}\|J_\theta\|^2 + \frac{r^3}{6}\left.\frac{d^3}{dr^3}\right|_{r=0}\|J_\theta\|^2 + \frac{r^4}{24}\left.\frac{d^4}{dr^4}\right|_{r=0}\|J_\theta\|^2 + o(r^4) \\
&= 0 + r0 + \frac{r^2}{2}2 + \frac{r^3}{6}0 + \frac{r^4}{24}(-8K(P)) + o(r^4) \\
&= r^2 - \frac{K(P)}{3}r^4 + o(r^4) \\
&= r^2(1 - \frac{K(P)}{3}r^2 + o(r^2))
\end{aligned}$$

C'est bien la formule que l'on cherchait.

3. $L(C_r) = \int_0^{2\pi} \|J_\theta(r)\| d\theta$.
4. Dans $\mathbb{S}^2$, on a $H(r,\theta) = \cos(r)m + \sin(r)(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v)$, d'où $\|J_\theta(r)\| = \sin(r)$.

Exercice 4. Champs de Jacobi sur les surfaces, et courbure.

1. Comme c est une géodésique et V est parallèle, on sait que $h(\dot{c}, V)$ est une constante, donc 0. Ainsi on a $V(r) = g(r)\partial_\theta$. Or $\|V(r)\|$ doit aussi être constant, et $\|V(0)\| = 1$, d'où $|g(r)| = \frac{1}{\|\partial_\theta\|} = \frac{1}{f(r,0)}$. Par continuité, il en suit $\partial_\theta = f(r,0)V(r)$. Or ∂_θ est la champ de Jacobi avec les conditions initiales décrites dans la question.
2. Comme V est parallèle, il en suit que $\nabla_{\frac{d}{dr}}\nabla_{\frac{d}{dr}}J = \partial_r^2 f(r,0)V(r)$, et l'équation de Jacobi devient $\partial_r^2 f(r,0)V(r) + f(r,0)R(V(r), \partial_r)\partial_r = 0$. En prenant le produit scalaire avec $V(r)$, on trouve $\partial_r^2 f(r,0) + f(r,0)K = 0$.
3. Ces trois cas correspondent respectivement à $f(r,\theta) = r$, $f(r,\theta) = \sin(r)$ et $f(r,\theta) = \sinh(r)$.