Université Paris Saclay, Orsay
2024–2025

Interrogation 4 : Formes blinéaires, formes quadratiques

Durée : 30 minutes – 4 questions.

Le 10 décembre 2024

Question 1. (2 points) On fixe un espace vectoriel réel E. On note Bil(E) l'espace des formes bilinéaires sur E. Reformulez la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique :

"*On peut trouver une forme bilinéaire symétrique sur E qui n'est pas antisymétrique.*"

Vous ferez attention aux quantificateurs et simplifierez les négations dans la mesure du possible.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Question 2. (2 points) Dans ce qui suit, E est un espace vectoriel réel. Répondez par vrai ou faux et argumentez par une démonstration ou un contre-exemple. Les dessins pertinents seront valorisés.

1. Une forme bilinéaire φ sur E est symétrique si et seulement si, pour tous $\vec{x}$, $\vec{y} \in E$, on a $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{x}, -\vec{y}) = \varphi(-\vec{x}, \vec{y})$.

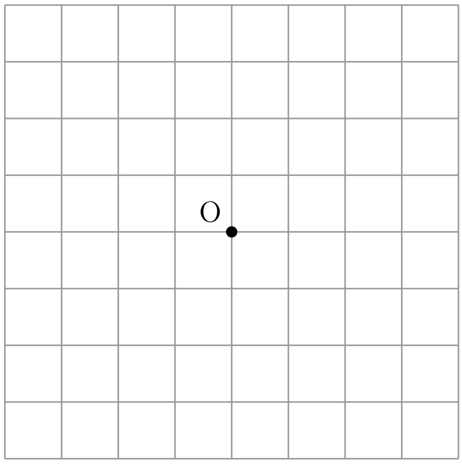
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .

2. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (\vec{v}, \vec{w})$ une base de $\mathbb{R}^2$. Si $q(\vec{v}) > 0$ et $q(\vec{w}) > 0$, alors q est de signature $(2, 0)$.

   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .

Question 3. (3 points) Soit $q(x,y) := x^2 - 2xy - 3y^2$. En expliquant brièvement vos constructions :

1. Tracez le cône isotrope de q sur le dessin ci-contre.



2. Tracez l'allure de la courbe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : q(x,y) = 1\}$.

Question 4. (3 points) Pour tous $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$, on pose $\varphi(\vec{v}, \vec{w}) := (v_1 + 2v_2)(3w_1 - 2w_2)$.

1. Justifiez brièvement que φ soit une forme bilinéaire.

2. Écrivez la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Quel est sont rang ?

3. Soit q la forme quadratique associée à φ. Réduisez q à l'aide de l'algorithme de Gauss. Quelle est sa signature ? Son rang ?