

Interrogation 2 : Classes de similitudes

Durée : 30 minutes - 4 questions.

Le 15 octobre 2024

Question 1. Reformuler la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique : “Le noyau d’un endomorphisme nilpotent n’est pas trivial.”

.....
.....
.....
.....

Question 2. Répondre par vrai ou faux et argumenter par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Une somme de matrices nilpotentes est nilpotente.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Deux matrices $n \times n$ de projection ayant la même trace sont semblables.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3. On munit \mathbb{R}^2 du produit scalaire usuel. Soient $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (1, 0)$ deux vecteurs formant une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 . La matrice du produit scalaire dans \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Utilisez l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée (f_1, f_2) de \mathbb{R}^2 .

.....

- Déduisez-en une matrice K triangulaire supérieure telle que $(K^T)K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

.....

Question 4. Soient E un espace vectoriel et $f \in L(E)$.

- Soient $v \in \text{Ker}(f^2) \setminus \text{Ker}(f)$ et $w \in \text{Ker}(f) \setminus \text{Vect}(f(v))$. Montrez que $(v, f(v), w)$ est libre. En supposant que $\dim(E) = 3$, écrivez la matrice de f dans cette base.

.....

- Si $\dim(E) = 4$, combien y a-t-il de classes de similitude de matrices nilpotentes dans $L(E)$? Explicitiez une matrice dans chacune de ces classes.

.....

