

**Interrogation 2 : Classes de similitudes**

Durée : 30 minutes - 4 questions.

Le 15 octobre 2024

**Question 1.** Reformuler la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique : “Le noyau d’un endomorphisme nilpotent n’est pas trivial.”

.....  
.....  
.....  
.....

**Question 2.** Répondre par vrai ou faux et argumenter par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Une somme de matrices nilpotentes est nilpotente.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

2. Deux matrices  $n \times n$  de projection ayant la même trace sont semblables.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Question 3.** On munit  $\mathbb{R}^2$  du produit scalaire usuel. Soient  $e_1 = (1, 1)$  et  $e_2 = (1, 0)$  deux vecteurs formant une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^2$ . La matrice du produit scalaire dans  $\mathcal{B}$  est  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Utilisez l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée  $(f_1, f_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Déduisez-en une matrice  $K$  triangulaire supérieure telle que  $(K^T)K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Question 4.** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f \in L(E)$ .

- Soient  $v \in \text{Ker}(f^2) \setminus \text{Ker}(f)$  et  $w \in \text{Ker}(f) \setminus \text{Vect}(f(v))$ . Montrez que  $(v, f(v), w)$  est libre. En supposant que  $\dim(E) = 3$ , écrivez la matrice de  $f$  dans cette base.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Si  $\dim(E) = 4$ , combien y a-t-il de classes de similitude de matrices nilpotentes dans  $L(E)$ ? Explicitiez une matrice dans chacune de ces classes.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....