L3MATH
M203-Algèbre

Université Paris Saclay, Orsay
2024-2025

Interrogation 1 : Matrices équivalentes, matrices semblables

Durée : 30 minutes - 4 questions.

Le 24 septembre 2024

Question 1. Soient i, j, $u \in \mathbb{R}^2$ comme représentés sur le schéma ci-contre.

1. Soit v le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (i, j)$. Rappelez la définition de ces coordonnées, et construisez v ci-contre.

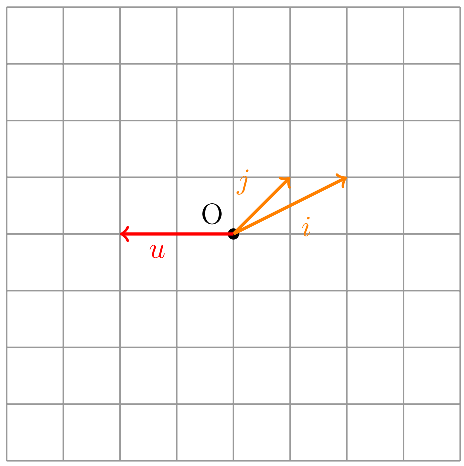
   ....
   ....

2. Déterminez géométriquement les coordonnées du vecteur u (les traits de construction sont importants !).

   ....
   ....
   ....
   ....

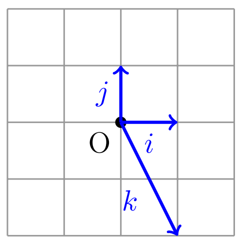
3. Ecrivez la relation matricielle entre les coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$ et les coordonnées Y dans la base (u, v).

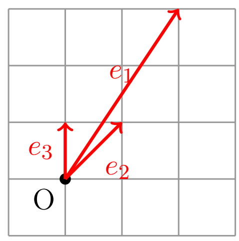
   ....
   ....
   ....



Question 2. Répondez par Vrai ou Faux en justifiant : Il n'existe pas d'application linéaire telle que les images de i, j, k soient respectivement e_1, e_2, e_3.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

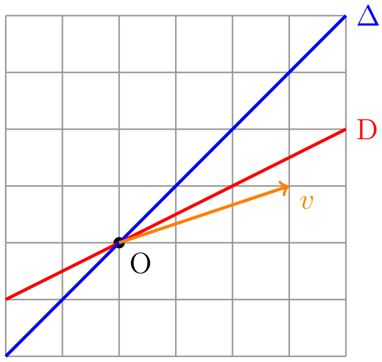




Question 3. On se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé. Soient p la projection orthogonale sur $D = \text{Vect}((2,1))$ et s la symétrie orthogonale d'axe $\Delta = \text{Vect}((1,1))$. Soit v le vecteur de coordonnées $(3,1)$.

1. Construisez géométriquement $s \circ p \circ s^{-1}(v)$ ci-contre, en indiquant chaque étape.

   ....
   ....
   ....



2. Décrivez géométriquement la transformation $s \circ p \circ s^{-1}$, en justifiant votre réponse.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Question 4. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et $F = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{F}$ la famille constituée des vecteurs $f_1 = (0,1,2)$, $f_2 = (0,0,0)$, $f_3 = (1,3,1)$ et $f_4 = (-1,0,5)$.

1. Justifiez pourquoi il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$. Déterminez sa matrice associée dans des bases que l'on précisera.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Déterminez le rang de f. Déduisez-en sa matrice réduite.

   ....
   ....
   ....
   ....

3. Expliquez à partir de l'exemple les grandes étapes du raisonnement permettant de déterminer les bases dans lesquelles f admet comme matrice la matrice réduite.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....