Chapitre 2

Produits scalaires et isométries vectorielles

Ces notes ont été rédigées par Mélanie GUENAIS (2020-2022), et reprises par Damien THOMINE (2022-2025).

Ce texte contient de nombreux passages en gris. Ceux-ci pourront-être passé en première lecture. Ces passages contiennent cependant de nombreuses démonstrations ; s'il n'est pas important (ni souhaitable) de les apprendre, cela peut être un exercice instructif d'essayer de les faire soi-même.

Introduction et cadre de travail

Il s'agit d'étudier dans ce chapitre les ensembles de matrices liés à un produit scalaire. Cette étude sera complétée dans le chapitre suivant concernant plus généralement les formes bilinéaires et quadratiques. Dans un second temps, il s'agira de décrire du point de vue algébrique et géométrique certains sous-groupes d'isométries et d'isométries affines.

- ▷ Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
- ▷ E est de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et on note $\dim E = n$.
- ▷ De manière générale, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne un produit scalaire sur E.

I Produit scalaire et représentations matricielles

I.1 Définitions générales et rappels

On donne la définition générale d'un produit scalaire, valable sur tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque.

Définition I.1 (Produit scalaire)**.**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** *sur E toute application φ de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :*

- ▷ *φ est bilinéaire : pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \varphi(y, z) \quad \textit{et} \quad \varphi(z, \lambda x + y) = \lambda \varphi(z, x) + \varphi(z, y)$$

▷ *φ est symétrique : $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$ pour tous x, $y \in E$.*

▷ *φ est définie : pour tout $x \in E$, si $\varphi(x,x)=0$ alors $x=0$.*

▷ *φ est positive : $\varphi(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.*

Exemple I.2.

*Le **produit scalaire canonique** φ sur $E=\mathbb{R}^n$ est défini par :*

$$\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall\ x,y \in \mathbb{R}^n.$$

On dispose de même d'un produit scalaire φ sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\varphi(X,Y) := X^T Y = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \quad \forall\ X,Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Remarque I.3.

On aurait pu remplacer :

▷ *La première condition par : φ est linéaire à gauche ;*

▷ *les 2 dernières conditions par : $\varphi(x,x)>0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.*

Ce qu'il faut savoir faire :

▷ Connaître et ré-écrire les définitions.

▷ Montrer qu'une application donnée est un produit scalaire.

▷ Justifier la remarque ci-dessus.

Notation : Le produit scalaire de deux vecteurs x et y sera le plus souvent noté $\langle x,y\rangle$.

I.2 Matrice associée à un produit scalaire

On s'intéresse, comme au chapitre précédent, au lien entre produit scalaire et matrice lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie. Comme d'habitude, il faut choisir une base. Cette base étant donnée, on peut représenter un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de façon unique par une matrice.

Propriété I.4 (Ecriture matricielle d'un produit scalaire dans une base)**.**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire de E. Pour tous $(x,y) \in E^2$, on note X et Y leur matrice de coordonnées dans $\mathscr{B}$. Alors il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tous x, $y \in E$,

$$\langle x,y\rangle = (X^T)AY. \tag{2.1}$$

En notant $A=(a_{i,j})_{(i,j)\in\{1;n\}^2}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, cette égalité peut s'écrire :

$$\langle x,y\rangle = \sum_{(i,j)\in\{1;n\}^2} a_{i,j} x_i y_j. \tag{2.2}$$

Preuve : Soit e_i le vecteur dont la i-ème coordonnée est 1, et les autres coordonnées sont nulles. On pose $a_{i,j} := \langle \delta_i, \delta_j \rangle$, et A la matrice $(a_{i,j})_{(i,j)\in\{1;n\}^2}$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j.$$

Une telle matrice A existe. De plus, si B est telle que $\langle x, y\rangle = (X^T)BY$ pour tous vecteurs x, y, alors $a_{i,j} = \langle e_i, e_j\rangle = B_{i,j}$ pour tous i, j, donc $B = A$: une telle matrice A est unique. □

Exercice 1. Quelle est la matrice associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$?

Exemple I.5.

Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\mathscr{B}$ la base canonique et $\langle \cdot, \cdot\rangle$ le produit scalaire usuel. La matrice de $\langle \cdot, \cdot\rangle$ dans $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est le cas plus généralement dans une base orthonormée. Posons $f_1 := (1, 1)$, $f_2 := (3, 1)$ et $\mathscr{B}' := (f_1, f_2)$. La matrice de $\langle \cdot, \cdot\rangle$ dans $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Soit $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$. On vérifie que c'est un produit scalaire de $\mathbb{R}^2$. Ses matrices dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}.$$

Remarque I.6.

La propriété précédente associe à un produit scalaire donné une matrice. On peut étudier la réciproque : fixons une base $\mathscr{B}$ dans E et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et définissons $\langle \cdot, \cdot\rangle$ par l'Équation (2.2). Alors :

- ▷ *$\langle \cdot, \cdot\rangle$ est une application bilinéaire de E dans E.*
- ▷ *$\langle \cdot, \cdot\rangle$ est symétrique si et seulement si A est symétrique.*
- ▷ *$\langle \cdot, \cdot\rangle$ n'est pas toujours défini positif.*

Exercice 2. Justifier chacun des points de la remarque précédente.

La description complète de ces matrices est l'objet d'un chapitre futur. Pour l'instant, nous énoncerons une propriété partielle qui donne des conditions nécessaires pour représenter la matrice associée à un produit scalaire :

Propriété I.7.

Si A est la matrice associée à un produit scalaire, alors :

- ▷ *A est une matrice symétrique : $A^T = A$.*
- ▷ *A est inversible.*

▷ *Les valeurs propres de A sont réelles et strictement positives.*

Preuve : Commençons par le premier point. Nous reprenons les notations de la Propriete I.4, pour tous x, $y \in E$, le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant symétrique [1],

$$X^T AY = \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = Y^T AX.$$

Or $Y^T AX$ est un réel, donc $Y^T AX = (Y^T AX)^T = X^T A^T Y$. Ainsi, $X^T A^T Y = X^T AY$ pour tous X, Y. La matrice représentant un produit scalaire étant unique, $A^T = A$.

Le second point découle du troisième : A est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre, ce qui est le cas si toutes les valeurs propres sont strictement positives.

Passons au troisième point. Commençons par montrer que les valeurs propres réelles sont strictement positives. Soient λ une valeur propre réelle de A, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne propre associé, et $x \in E$ le vecteur de coordonnées X. Alors

$$\langle x, x \rangle = X^T AX = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X.$$

Or $X^T X = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ et $\langle x, x \rangle > 0$, donc $\lambda > 0$.

Maintenant, montrons que toute les valeurs propres de A sont réelles. On fait agir A sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Soient λ une valeur propre de A et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur colonne propre associé. Alors

$$\overline{X}^T AX = \lambda \overline{X}^T X.$$

Mais, de plus, la matrice A étant réelle, $A\overline{X} = \overline{AX}$. Par conséquent,

$$\overline{X}^T AX = \overline{X}^T A^T X = (A\overline{X})^T X = (\overline{AX})^T X = (\overline{\lambda X})^T X = \overline{\lambda X}^T X.$$

Ainsi, $\lambda \overline{X}^T X = \overline{\lambda X}^T X$. Or $\overline{X}^T X = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$, donc $\lambda \neq \overline{\lambda}$. La valeur propre λ est donc réelle.
□

Notation : On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles :

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R});\ M^T = M\}$$

Exercice 3. $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il stable par multiplication ?

II Congruence et décomposition de Cholevski

II.1 Matrices symétriques congruentes

Question II.1.

Pour un produit scalaire donné, quelle est la famille de matrices associée obtenue en faisant varier les bases de E ? Quel est la "meilleure" matrice possible ? La "meilleure" base associée ?

1. On peut aussi, en reprenant les notations de la démonstration de la Propriete I.4, montrer directement que $a_{j,i} = \langle e_j, e_i \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = a_{i,j}$.

Définition II.2.

Soient A, B deux matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'elles sont **congruentes** *si elles peuvent être associées au même produit scalaire, mais dans des bases différentes.*

Cette définition peut se traduire algébriquement, et définit une nouvelle classe d'équivalence sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Propriété II.3.

Soient A, $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. La matrice B est congruente à A si et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = (P^T)AP$.

Cette relation définit une relation d'équivalence sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Preuve : Supposons les matrices A et B congruentes. Il existe un espace vectoriel E, un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E et deux bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ telles que A soit la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans $\mathscr{B}$ et B celle de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans $\mathscr{B}'$. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Pour $x \in E$, on note X ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ et X' ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$, de telle sorte que $X = PX'$.

Remarquons que $\langle x, y \rangle = X^T AY = (X')^T BY'$ pour tous x, $y \in E$. Mais :

$$X^T AY = (PX')^T A(PY') = (X')^T P^T APY'.$$

Or B est l'unique matrice M telle que $\langle x, y \rangle = (X')^T MY'$ pour tous x, $y \in E$. Donc $B = P^T AP$.

Réciproquement, supposons que $B = P^T AP$. Posons $E = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de matrice A dans la base canonique, $\mathscr{B}'$ la base de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice de passage dans la base $\mathscr{B}$ est P. Alors, pour tous x, $y \in E$,

$$\langle x, y \rangle = X^T AY = (PX')^T A(PY') = (X')^T (P^T AP)Y' = (X')^T BY'.$$

Donc B représente le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathscr{B}'$, et est donc congruente à A.

Finalement, il faut démontrer la réflexivité, la symétrie et la transitivité de cette relation. Notons $A \sim_c B$ si B est congruente à A.

1. Réflexivité : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Choisissons $P = I_n$. On obtient $A \sim_c A$.
2. Symétrie : soient A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \sim_c B$. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^T AP$. Alors $A = (P^T)^{-1} BP^{-1} = (P^{-1})^T BP^{-1}$, où $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$. Donc $B \sim_c A$.
3. Transitivité : soient A, B, $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \sim_c B$ et $B \sim_c C$. Soient P, $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $B = P^T AP$ et $C = Q^T BQ$. Alors $C = Q^T P^T APQ = (PQ)^T A(PQ)$, et $PQ \in GL_n(\mathbb{R})$. Donc $A \sim C$.

□

Exemple II.4.

Reprenons le produit scalaire $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ sur $\mathbb{R}^2$. Sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce calcul est facile : les coefficients de la matrices sont les coefficients de la forme bilinéaire φ. Soit $\mathscr{B}'$ la base composée des vecteurs $f_1 = (1, 1)$ et $f_2 = (3, 1)$, et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans $\mathscr{B}'$ est

$$(P^T)AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}.$$

II.2 Bases orthonormées

Le procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt, sur lequel on reviendra bientôt, est un algorithme qui permet de construire des base orthonormées partant de n'importe quel produit scalaire et de n'importe quelle base. L'intérêt de telles bases multiple : calcul de distances, d'angles, de projections et de symétries... et analyse des classes de congruence.

On rappelle qu'un produit scalaire définit une norme appelée ***norme euclidienne***, donnée pour tout $x \in E$ par $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

Définition II.5 (Rappel : base orthonormée)**.**
Une famille de vecteurs $(e_1, \cdots, e_n)$ *forme une base orthonormée si et seulement si* $n = \dim(E)$ *et, pour tout* $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ *et* $\|e_i\| = 1$.

Propriété II.6.
Dans une base orthonormée, les coordonnées coincident avec le produit scalaire sur la base : si $(e_1, \cdots, e_n)$ *est une base orthonormée et* $x \in E$*, alors*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i.$$

PREUVE : Soit $x \in E$ et soient x_i les coordonnées de x dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$, de telle sorte que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Soit $i \in \{1; n\}$. Alors :

$$\langle x, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_j, e_i \rangle .$$

Or $\langle e_j, e_i \rangle = 1$ si $j = i$, et 0 sinon. Donc $\langle x, e_i \rangle = x_i$, ce qu'il fallait démontrer. □

II.3 Décomposition de Cholevski

Dans ce cadre, l'étude des classes d'équivalence est assez simple. En effet, l'existence d'une base orthonormée permet de d'obtenir le résultat suivant, qui donne une décomposition de toutes les matrices associées à un produit scalaire :

Théorème 1.
Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* n*. L'ensemble de toutes les matrices associées à un produit scalaire est indépendant de ce produit scalaire et égal à la classe de congruence de la matrice identité :*

$$\{(P^T)P;\ P \in GL_n(\mathbb{R})\}.$$

Plus précisément, toute matrice A *de* $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ *associée à un produit scalaire peut s'écrire sous la forme*

$$A = (K^T)K \text{ où } K \text{ est une matrice triangulaire supérieure inversible.}$$

Cette écriture s'appelle **décomposition de Cholevski** *de* A*.*

Preuve : Il s'agit d'une conséquence de l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, que nous allons rappeler. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire et $\mathscr{B}$ une base de E tels que A soit la matrice associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Nous allons utiliser ce procédé pour obtenir une nouvelle base $\mathscr{B}'$ orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Commençons par poser

$$f_1 := \frac{e_1}{\sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle}},$$

de telle sorte que $\langle f_1, f_1 \rangle = 1$.

Ensuite, nous procédons par récurrence. Supposons que l'on a obtenu $(f_1, \cdots, f_k)$ orthonormés et tels que $\mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$. Prenons le vecteur e_{k+1}, et :

- ▷ Projetons-le orthogonalement à $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$. Cela revient à retrancher son projeté orthogonal sur $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$. Notons f'_{k+1} le vecteur obtenu.
- ▷ Multiplions f'_{k+1} par un scalaire bien choisi. Nous obtenons alors un vecteur f_{k+1} tel que $\langle f_{k+1}, f_{k+1} \rangle = 1$.

Pour la première étape, le vecteur suivant convient :

$$f'_{k+1} := e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle f_{k+1}, f_i \rangle f_i.$$

Par construction, pour tout $j \in \{1; k\}$,

$$\begin{aligned}
\langle f'_{k+1}, f_i \rangle &= \left\langle e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle f_{k+1}, f_i \rangle f_i, f_j \right\rangle \\
&= \langle e_{k+1}, f_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle f_{k+1}, f_i \rangle \langle f_i, f_j \rangle \\
&= \langle e_{k+1}, f_j \rangle - \langle f_{k+1}, f_j \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\langle f_i, f_j \rangle = 1$ si $i = j$, et 0 sinon. De plus, $\mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_k, f'_{k+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$.

Pour la seconde étape, posons

$$f_{k+1} := \frac{f'_{k+1}}{\sqrt{\langle f'_{k+1}, f'_{k+1} \rangle}}.$$

Alors $\mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_{k+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$, et la famille $(f_1, \cdots, f_{k+1})$ est bien orthonormée.

Par récurrence, on obtient une base orthonormée $(f_1, \cdots, f_n)$ de E telle que $\mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ pour tout $k \in \{1; n\}$. Posons $\mathscr{B}' := (f_1, \cdots, f_n)$. Soit K la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

La matrice représentant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base $\mathscr{B}'$ est $B = (K^{-1})^T A K^{-1}$. Mais, la base $\mathscr{B}'$ étant orthonormée, B est la matrice identité, donc $I_n = (K^{-1})^T A K^{-1}$, ou encore $A = K^T K$. De plus, comme $\mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ pour tout k, le vecteur e_k est combinaison linéaire de $f_1, \cdots, f_k$ pour tout k, et donc la matrice K est triangulaire supérieure. □

Exercice 4. La décomposition de Cholevski est-elle unique ?

Conséquence II.7.

Toute matrice représentant un produit scalaire est congruente à la matrice identité. En particulier, il n'y a qu'une seule classe de congruence de matrices symétriques à valeurs propres strictement positives.

III Orthogonalité, représentations de sous-espaces vectoriels

Dans cette section, lorsque la base n'est pas précisée, elle est supposée orthonormée.

Le but de cette section est d'utiliser la notion de sous-espaces orthogonaux pour convertir des représentations paramétriques en représentations cartésiennes de sous-espaces vectoriels,et vice-versa.

III.1 Sous-espaces orthogonaux

Définition III.1 (Rappel : sous-espace orthogonal)**.**

Soit $F \subset E$ non vide. On appelle **orthogonal** *de F le sous-espace vectoriel $F^\perp$ défini par :*

$$F^\perp = \{x \in E;\ \forall f \in F\ \langle f, x\rangle = 0\} = \bigcap_{f \in F} \{x \in E;\ \langle f, x\rangle = 0\}.$$

De plus, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \oplus F^\perp = E$.

Propriété III.2.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F \oplus F^\perp = E$.

Preuve : Montrons d'abord de F et $F^\perp$ sont transverses. Soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors $\langle x, y\rangle = 0$ pour youy $f \in F$ (car $x \in F^\perp$). En choisissant en particulier $f = x$, on obtient $\langle x, x\rangle = 0$, et donc $x = 0$ car le produit scalaire est défini.

Montrons ensuite que $F + F^\perp = E$. Soient $k = \dim(F)$ et $(e_1, \cdots, e_k)$ une base de F. Soit u l'application linéaire

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^k \\ x & \mapsto & (\langle e_1, x\rangle, \cdots, \langle e_k, x\rangle) \end{array} \right. .$$

Alors $F^\perp = \mathrm{Ker}(u)$. De plus, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - \mathrm{rg}(u) \geq n - k$. Donc, comme F et $F^\perp$ sont transverses,

$$n \geq \dim(F + F^\perp) = \dim(F) + \dim(F^\perp) \geq k + (n - k) = n.$$

Par conséquent, $\dim(F + F^\perp) = n$ et $F + F^\perp = E$. □

On démontre au passage un forme de dualité entre un sous-espace vectoriel et son orthogonal :

Propriété III.3.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Preuve : Posons $k = \dim(F)$. Alors $\dim(F^\perp) = n - k$, donc $\dim((F^\perp)^\perp) = n - (n - k) = k$.

Soit $x \in F$. Soit $f \in F^\perp$. Alors $\langle x, f\rangle = \langle f, x\rangle = 0$. Donc $\langle x, f\rangle = 0$ pour tout $f \in F^\perp$, donc $x \in (F^\perp)^\perp$. On a donc montré que $F \subset (F^\perp)^\perp$, et ces deux sous-espaces coincident par égalité des dimensions. □

III.2 Formes linéaires, hyperplans et vecteur normaux

Le but est ce paragraphe est d'identifier les formes linéaires à l'aide du produit scalaire, puis d'en déduire des méthodes pratiques permettant de déterminer l'équation cartésienne d'un hyperplan.

Remarque III.4.
Pour tout $u \in E$, l'application ℓ_u définie pour tout $x \in E$ par $\ell_u(x) = \langle u, x\rangle$ est une forme linéaire sur E.

En fait, on peut dire plus : si $u \neq 0$, alors ℓ_u est non nulle (en effet, $\ell_u(u) = \langle u, u\rangle > 0$), et donc $\mathrm{Ker}(\ell_u)$ est un hyperplan. En manipulant la définition d'un hyperplan, il vient :

$$\mathrm{Ker}(\ell_u) = \{x \in E, \langle u, x\rangle = 0\} = \{u\}^\perp.$$

On peut alors faire le lien entre forme linéaire et produit scalaire, en passant par la caractérisation d'un hyperplan :

Propriété III.5.
Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E. Alors H est un hyperplan si et seulement si l'une des propriétés suivantes est satisfaite :

- ▷ *il existe $w \neq 0$ tel que $H = \{w\}^\perp$;*
- ▷ *il existe $\ell \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = \mathrm{Ker}(\ell)$.*

Un tel vecteur w est appelé **vecteur normal** *à H. Il est unique à un facteur multiplicatif près et définit une base de $H^\perp$.*

Preuve : Comme H est de dimension $n-1$, son orthogonal $H^\perp$ est une droite vectorielle. Soit w un vecteur engendrant $H^\perp$. Alors

$$H = (H^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(w)^\perp.$$

De plus, si $x \in \mathrm{Vect}(w)^\perp$, alors $\langle x, w\rangle = 0$, donc $x \in \{w\}^\perp$. Réciproquement, si $x \in \{w\}^\perp$, étant donné $y = \lambda w \in \mathrm{Vect}(w)$, on a $\langle x, y\rangle = \lambda \langle x, w\rangle = 0$, donc $x \in \mathrm{Vect}(w)^\perp$. Par conséquent, $\mathrm{Vect}(w)^\perp = \{w\}^\perp$. □

Exercice 5. Montrer que deux formes linéaires qui ont le même noyau sont proportionnelles.

On déduit de ce qui précède une version très simplifiée d'un théorème qui prendra une forme très générale en analyse : le théorème de représentation de Riesz.

Conséquence III.6 (Théorème de Riesz en dimension finie)**.**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. Toute forme linéaire de E dérive du produit scalaire. Autrement dit, pour toute forme linéaire $\ell \in E^*$, il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\ell(x) = \langle u, x\rangle .$$

Attention : Le vecteur u représentant une forme linéaire donnée dépend du produit scalaire choisi. De même, dans la propriété précédente, étant donné un hyperplan H, le choix de vecteurs w tel que $H = \{w\}^\perp$ dépend du produit scalaire choisi.

PREUVE : Étant donné $w \in E$, on dispose d'une forme linéaire $x \mapsto \langle w, x\rangle$. L'application

$$\Theta : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & E^* \\ w & \mapsto & (x \mapsto \langle w, x\rangle) \end{array} \right. .$$

est linéaire. On cherche à montrer que Θ est un isomorphisme. Les espaces E et E^* étant de même dimension, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(\Theta) = \{0\}$.

Soit $w \in \mathrm{Ker}(\Theta)$. Alors, pour tout $x \in E$, on a $\langle w, x\rangle = 0$. En particulier, $\langle w, w\rangle = 0$, et donc $w = 0$. $\square$

Exercice 6. Trouver une autre démonstration du théorème de Riesz, en s'appuyant sur le lien entre produit scalaire et hyperplans et l'exercice précédent.

Exemple III.7.

Supposons E muni d'une base orthonormée. Pour $x \in E$, notons X son vecteur coordonnées dans cette base. Soit ℓ une forme linéaire. Elle peut être représentée dans cette base par un vecteur ligne L.

Alors $\ell(x) = LX = (L^T)^T X$. Le vecteur $y \in E$ représentant la forme linéaire ℓ est donc le vecteur de coordonnées L^T (on a bien alors $\langle y, x\rangle = Y^T X = \ell(x)$ pour tout x). ***Dans une base orthonormée****, prendre le représentant, c'est transposer le vecteur de coordonnées.*

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base et de son produit scalaire canoniques, la forme linéaire $\ell(x) = 2x_1 + x_2$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, et est représentée par le vecteur $y = (2, 1)$ qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ sur $\mathbb{R}^2$. Quel vecteur représente la forme linéaire $\ell(x) = 2x_1 - x_2$?

III.3 Représentation paramétrique, représentation cartésienne

Dans cette partie, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n finie. Les sous-espaces vectoriels ont deux grands types de représentations : paramétrique et cartésienne. Un produit scalaire n'est pas nécessaire, mais aide à convertir une représentation en une autre.

Définition III.8 (Représentation paramétrique)**.**

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension k. Une ***représentation paramétrique*** *de F est une écriture de F à l'aide d'une base $(v_1, \cdots, v_k)$ de F. On peut écrire une telle représentation de différentes façons :*

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k) \\ &= \mathbb{R}v_1 + \cdots + \mathbb{R}v_k \\ &= \{t_1v_1 + \cdots + t_kv_k,\ (t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k\}. \end{aligned}$$

Attention : Si $(v_1, \cdots, v_m)$ est une famille génératrice de F, on aura aussi $F = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_m)$ (et les deux égalités suivantes). Cependant, dans le cadre de ce cours, on ne parlera pas de représentation paramétrée ; ici, une représentation paramétrée a exactement $\dim(F)$ paramètres.

Définition III.9 (Représentation cartésienne)**.**

*Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension k. Une **représentation cartésienne** de F est une écriture de F à l'aide de $n-k$ équations, c'est-à-dire de $n-k$ formes linéaires linéairement indépendantes $(\ell_1, \cdots, \ell_{n-k})$:*

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Ker}(\ell_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(\ell_{n-k}) \\ &= \{u \in E : \ \ell_1(u) = \cdots = \ell_{n-k}(u) = 0\}. \end{aligned}$$

Remarque III.10.

Donner une représentation cartésienne d'un sous-espace vectoriel, c'est écrire ce sous-espace vectoriel comme intersection d'hyperplans.

Les représentations paramétriques sont utiles pour manipuler des sommes de sous-espaces vectoriels : si $F = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k)$ et $G = \mathrm{Vect}(w_1, \cdots, w_m)$, alors $F+G = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k, w_1, \cdots, w_m)$. Il reste à extraire une base de $F+G$ pour en obtenir une représentation paramétrique.

Les représentations cartésiennes sont utiles pour manipuler des intersections de sous-espaces vectoriels : si $F = \mathrm{Ker}(\ell_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(\ell_{n-k})$ et $G = \mathrm{Ker}(\ell'_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(\ell'_{n-k'})$, alors $F \cap G = \mathrm{Ker}(\ell_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(\ell_{n-k}) \cap \mathrm{Ker}(\ell'_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(\ell'_{n-k'})$. Il reste à éliminer les équations redondantes (qui s'expriment comme combinaison linéaires d'autres équations) pour obtenir une représentation cartésienne de $F \cap G$.

III.4 D'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension k, défini par un certain nombre d'équations $\ell_1(u) = 0$, …, $\ell_m(u) = 0$. En en cherche une représentation paramétrique.

Soit f l'application linéaire

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^m \\ u & \mapsto & (\ell_1(u), \cdots, \ell_m(u)) \end{array} \right.$$

Alors $F = \mathrm{Ker}(f)$. Déterminer une représentation paramétrique, c'est déterminer une base du noyau d'un endomorphisme. Ceci fonctionne même si certaines équations sont redondantes !

Notons $\mathscr{B}_m$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et L_i les coordonnées de ℓ_i dans cette base (i.e. $\ell_i(x) = \sum_{j=1}^n L_{ij} X_j$ pour tout $x \in E$). Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_m}(f)$ est la matrice dont les lignes sont les L_i.

Exemple III.11.

Soit F le sous-espace vectoriel défini par les deux équations $x+y+z=0$ et $x-2y=0$ dans $\mathbb{R}^3$. Dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, le sous-espace F est le noyau de l'endomorphisme dont la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que les manipulations sur les lignes d'une matrice ne modifient pas son noyau, ce qui permet de simplifier le système d'équations. Cet endomorphisme a pour noyau $\mathrm{Vect}(v_1)$, où $v_1 = (2, 1, -3)$. Par conséquent, $F = \mathrm{Vect}(v_1) = \{(2t, t, -3t), \ t \in \mathbb{R}\}$.

Remarque III.12.

La famille de formes linéaires $(\ell_i)_{i\leq i\leq m}$ *est libre si et seulement si* $\mathrm{rg}(A) = m$. *Par le théorème du rang, c'est le cas si et seulement si* $\dim(F) = \dim(E) - m$, *et donc* $m = n - k$.

Par exemple, un sous-espace vectoriel de dimension 2 *de* $\mathbb{R}^5$ *est défini par* $5 - 2 = 3$ *formes linéaires indépendantes.*

III.5 D'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension k dont on connaît une base $(v_1, \cdots, v_k)$. On en cherche une représentation cartésienne.

Par le théorème de représentation de Riesz, se donner une représentation cartésienne de F, c'est se donner une famille libre de $n-k$ vecteurs $(w_1, \cdots, w_{n-k})$ tels que $\ell_i = \langle w_i, \cdot\rangle$. C'est particulièrement facile si l'on travaille en coordonnées dans une base orthonormée !

Mais alors les vecteurs w_i sont tels que $\langle w_i, u\rangle = 0$ pour tout $u \in F$. On en déduit que $\mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_{n-k}) \subset F^\perp$. Par égalité des dimensions, $(w_1, \dots, w_{n-k})$ est une base de $F^\perp$. Autrement dit, trouver une représentation cartésienne de F, c'est trouver une base de $F^\perp$.

En pratique, soit $(v_1, \dots, v_k)$ une base de F. Soit f l'application linéaire

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & \mathbb{R}^k \\ u & \mapsto & (\langle v_1, u\rangle, \dots, \langle v_k, u\rangle) \end{array} \right.$$

Comme $w \in F^\perp$ si et seulement si $\langle v_i, u\rangle$ pour tout i, on a $F^\perp = \mathrm{Ker}(f)$. Enfin, une fois que l'on a déterminé une base $(w_1, \dots, w_{n-k})$ de $\mathrm{Ker}(f)$, les formes linéaires $\langle w_i, \cdot\ \rangle$ fournissent une représentation cartésienne de F.

Exemple III.13.

Dans $\mathbb{R}^3$, *soient* $v_1 = (3, 2, 1)$ *et* $v_2 = (1, 1, -1)$. *Soit* $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. *Alors* $F^\perp$ *est le noyau de l'endomorphisme dont la matrice est, dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cet endomorphisme a pour noyau $\mathrm{Vect}(w_1)$, *où* $w_1 = (3, -4, -1)$. *La forme linéaire associée à* w_1 *(via le produit scalaire usuel) est* $(x, y, z) \mapsto 3x - 4y - z$. *Par conséquent, une représentation cartésienne de* F *est*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 3x - 4y - z = 0\}.$$

Remarque III.14.

Le passage d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne, ou le passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique, se ressemblent beaucoup. Dans les deux cas, on s'est ramené à la détermination d'une base de l'orthogonal d'un sous-espace.

III.6 Cas particulier : Droites du plan

Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Alors D peut être représentée par un vecteur directeur ou par une équation cartésienne.

Si D a pour équation $ax + by = 0$ (a, b non tous deux nuls), pour obtenir une représentation cartésienne, on cherche une base du noyau de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$. Ce noyau est engendré par le vecteur $(-b, a)$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, donc $D = \mathrm{Vect}((-b, a))$.

Si $D = \mathrm{Vect}((a, b))$, pour obtenir une représentationparamétrique, on cherche un base du noyau de de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$. Ce noyau est engendré par le vecteur $(-b, a)$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, donc $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -bx + ay = 0\})$.

III.7 Cas particulier : Droites et plans de l'espace

On se place dans $\mathbb{R}^3$. Si l'on a une équation cartésienne d'un plan, il est aisé d'en déterminer une représentation paramétrique : il suffit de trouver deux vecteurs linéairement indépendants satisfaisant cette équation. Par exemple, si $H = \{(x, y, z) : \ x + 2y + 3z = 0\}$, alors $v_1 = (3, 0, -1)$ et $v_2 = (0, 2, -1)$ appartiennent à H, donc $H = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Cela est facile car on a cherché une base du noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, ce qui est aisé.

De même, si l'on dispose d'une représentation paramétrique d'une droite, il est relativement facile d'en déterminer une équation cartésienne.

La difficulté consiste à passer d'une représentation paramétrique d'un plan à une représentation cartésienne, ou à l'inverse d'une représentation cartésienne d'une droite à une représentation paramétrique.

Dans l'espace, une solution expéditive consiste à utiliser le **produit vectoriel**. En effet, si (v_1, v_2) est une base d'un plan vectoriel H, alors $v_1 \wedge v_2 \neq 0$ est orthogonal à v_1 et à v_2, donc à H. Par conséquent, $H^\perp = \mathrm{Vect}(v_1 \wedge v_2)$. Reprenons les exemples précédents.

Exemple III.15.

Soit F le sous-espace vectoriel défini par les deux équations $x + y + z = 0$ et $x - 2y = 0$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors les vecteurs $w_1 = (1, 1, 1)$ et $w_2 = (1, -2, 0)$ sont normaux à F, donc le vecteur $v_1 := w_1 \wedge w_2$ est un vecteur directeur de F. Or

$$v_1 = w_1 \wedge w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

donc $F = \mathrm{Vect}(v_1) = \{(2t, t, -3t), \ t \in \mathbb{R}\}$.

Exemple III.16.

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $v_1 = (3, 2, 1)$ et $v_2 = (1, 1, -1)$. Soit $F := \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Alors un vecteur normal à F est

$$w_1 := v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on retrouve que

$$\begin{aligned} F &= \{u \in \mathbb{R}^3 : \ \langle w_1, u \rangle = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ -3x + 4y + z = 0\}. \end{aligned}$$

III.8 Cas particulier : Hyperplans

La méthode précédente se généralise afin d'obtenir des représentations cartésiennes d'hyperplans de $\mathbb{R}^n$ dont on connaît une base (ou, de façon duale, des représentations paramétriques de droites donc on connaît une représentation cartésienne).

Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ une base de H. Soit $u = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Alors $u \in H$ si et seulement si u est combinaison linéaire des vecteurs v_i ; les vecteurs v_i étant libres, $u \in H$ si et seulement si la famille $(v_1, \ldots, v_{n-1}, u)$ est liée, donc si et seulement si

$$\det(v_1, \ldots, v_{n-1}, u) = 0.$$

Remarquons que $u \mapsto \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, u)$ est une forme linéaire, et fournit donc une représentation cartésienne. Il ne reste qu'à développer le déterminant pour expliciter cette représentation.

Exemple III.17. *Dans $\mathbb{R}^4$, soit H l'hyperplan H engendré par les trois vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$; $v_2 = (1, 2, 1, 2)$; $v_3 = (-1, -2, 1, 2)$, qui forment une famille libre. Soit (x, y, z, t) un vecteur. Alors*

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) \in H &\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & x \\ 2 & 2 & -2 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \\ 4 & 2 & 2 & t \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 8x - 4y = 0.\end{aligned}$$

En simplifiant le résultat, on voit que l'hyperplan H est d'équation $2x - y = 0$.

Remarque III.18.
Appliquée à $\mathbb{R}^3$, cette méthode revient à utiliser le produit vectoriel. En effet, le produit vectoriel de deux vecteurs v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^3$ est caractérisé par la propriété

$$\det(v_1, v_2, u) = \langle v_1 \wedge v_2, u\rangle \quad \forall u \in \mathbb{R}^3,$$

et la forme linéaire $u \mapsto \langle v_1 \wedge v_2, u\rangle$ est donc celle obtenue par la méthode du déterminant.

Cette méthode permet de calculer des équations d'hyperplans. Elle peut être assez calculatoire quand la dimension augmente, sauf à trigonaliser la matrice associée, ce qui revient à appliquer la méthode générale exposée plus tôt.

III.9 Représentations et algorithme de Gram-Schmidt

La détermination d'une base d'un espace orthogonal peut aussi se faire à l'aide de l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exemple III.19. *Soient $v_1 = (1, 2, 3, 4)$; $v_2 = (1, 2, 1, 2)$; $v_3 = (-1, -2, 1, 2)$. On cherche une représentation paramétrique de*

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + 2y + 3z + 4t = x + 2y + z + 2t = -x - 2y + z + 2t = 0\}$$

Cette représentation paramétrique est $F = \mathrm{Vect}(w_1)$, où w_1 est un vecteur directeur de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)^\perp$.

Dans l'application donnée : Posons $v_4 := (1,0,0,0)$. *Alors* (v_1, v_2, v_3, v_4) *est une base*[2] *de* $\mathbb{R}^4$. *On utilise l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée* (v_1', v_2', v_3', v_4') *de* $\mathbb{R}^4$ *:*

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\sqrt{30}}(1,2,3,4) \\ v_2 &= \frac{1}{\sqrt{330}}(7,14,-9,-2) \\ v_3 &= \frac{1}{\sqrt{55}}(-1,-2,-5,5) \\ v_4 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0,0) \end{aligned}$$

Mais $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1', v_2', v_3')$, *donc* $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)^\perp = \mathrm{Vect}(v_4')$. *Le vecteur* $w_1 = v_4'$ *convient. Donc* $F = \mathrm{Vect}(w_1) = \mathrm{Vect}((2,-1,0,0))$.

IV Groupes d'isométries

IV.1 Isométries et matrices orthogonales

Définition IV.1.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Une ***isométrie*** *de E est un endomorphisme $f \in L(E)$ qui préserve le produit scalaire :* $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ *pour tous x, $y \in E$.*

La propriété suivante est un peu plus facile à vérifier en pratique (elle n'implique qu'un seul vecteur).

Propriété IV.2.

Soit $f \in L(E)$. Alors f est une isométrie si et seulement si f préserve la norme euclidienne : $\|f(x)\| = \|x\|$ *pour tout $x \in E$.*

Preuve : Si f est une isométrie, alors $\langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ pour tout $x \in E$, et donc, en prenant la récine carrée, $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Réciproquement, supposons que f préserve la norme euclidienne. le produit scalaire est caractérisé par sa norme associée grâce à l'identité de polarisation :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\| - \|x\| - \|y\|\right).$$

Or $\|x+y\| - \|x\| - \|y\| = \|f(x) + f(y)\| - \|f(x)\| - \|f(y)\|$, donc f préserve le produit scalaire. $\square$

Propriété IV.3.

L'ensemble des isométries de E forme un groupe pour la composition, appelé **groupe d'isométries de** E *et noté* $\mathcal{O}(E)$.

2. Attention à bien choisir le vecteur par lequel compléter (u_1, u_2, u_3) en une base. Ici, les vecteurs $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$ ne conviennent pas !

PREUVE : Montrons tout d'abord que toute isométrie est inversible. Soit $f \in L(E)$ une isométrie. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $0 = \|f(x)\| = \|x\|$, donc $x = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, et f est inversible.

Il s'agit maintenant de montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

- ▷ Pour tout $x \in E$, on a $\|x\| = \|x\|$, donc $id \in \mathcal{O}(E)$.
- ▷ Soient $f, g \in \mathcal{O}(E)$. Soit $x \in E$. Alors $\|(g \circ f(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|$, donc $g \circ f \in \mathcal{O}(E)$.
- ▷ Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Soit $x \in E$. Alors $\|f^{-1}(x)\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|x\|$, donc $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

□

Définition IV.4.
Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que P est une **matrice orthogonale** *si* $(P^T)P = I_n$

Propriété IV.5.
L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe orthogonal** *et noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

PREUVE : Les démonstrations sont vues en L2 et à connaître. □

Propriété IV.6.
Si $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $|\det(P)| = 1$. L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal** *et noté $SO_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 8. Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre complexe de P. Montrez que $|\lambda| = 1$.

Les matrices orthogonales sont les matrices qui représentent les isométries dans une base orthonormée. Elles sont aussi les matrices de passage entre bases orthonormées. Les matrices spéciales orthogonales préservent de plus l'orientation de ces bases. Les groupes $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des objets algébriques importants.

On peut alors définir une isométrie *directe* comme une isométrie de déterminant [3] 1. En particulier, la matrice d'une isométrie directe dans une base orthonormée est une matrice spéciale orthogonale. On note $SO(E)$ le groupe des isométries directes.

Pour reconnaitre une isométrie, on peut utiliser les caractérisations suivantes :

Propriété IV.7.
Soit $f \in L(E)$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Alors f est une isométrie si et seulement si l'une des propriétés suivantes est réalisée :

1. *l'image d'une base orthonormée par f est une base orthonormée ;*
2. *la matrice associée à f dans une base orthonormée est une matrice orthogonale.*

PREUVE : Les démonstrations sont vues en L2 et à connaître. □

3. Rappelons que le déterminant est un invariant de similitude, et donc ne dépend pas de la base choisie pour représenter l'endomorphisme.

IV.2 Projections et symétries orthogonales

Définition IV.8.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle ***projection orthogonale*** *sur F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.*

Exercice 9. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée de E dont les $\dim(F)$ premiers vecteurs forment une base de F et les vecteurs restants une base de $F^{\perp}$. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur F dans cette base ?

Définition IV.9.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle ***symétrie orthogonale*** *par rapport à F la symétrie d'axe F parallèlement $F^{\perp}$.*

Propriété IV.10.

Soit $f \in L(E)$. Il y a équivalence entre :

- ▷ *f est une symétrie orthogonale ;*
- ▷ *f est une symétrie et une isométrie.*

PREUVE : Soit F et G deux espaces supplémentaires. Soit s la symétrie d'axe F parallèlement à G. Pour $x \in E$, notons $x = x_F + x_G$, où $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Alors, pour tous x, $y \in E$:

$$\begin{aligned}
\|s(x)\|^2 &= \langle s(x), s(x) \rangle \\
&= \langle x_F - x_G, x_F - x_G \rangle \\
&= \langle x_F, x_F \rangle + \langle x_G, x_G \rangle - 2 \langle x_F, x_G \rangle \\
&= \|x\|^2 - 4 \langle x_F, x_G \rangle .
\end{aligned}$$

Par conséquent, s est une isométrie si et seulement si $\langle x_F, x_G \rangle = 0$ pour tous $x_F \in F$ et $x_G \in G$, c'est-à-dire si et seulement si F et G sont orthogonaux. □

Définition IV.11.

On appelle **réflexion** *une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.*

Exemple IV.12.

Dans le plan, les réflexions sont les symétries axiales[4]*.*

Dans l'espace, les réflexions sont les symétries orthogonales par rapport à des plans.

Propriété IV.13.

Les réflexions sont des isométries indirectes.

Démonstration.

Soit s une symétrie d'axe F parallèlement à G. Alors $s_{|F} = id$ et $s_{|G} = -id$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E dont les $\dim(F)$ premiers vecteurs appartiennent à F, et les vecteurs restants appartiennent à G. Alors la matrice de s dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale, avec $\dim(F)$ coefficients 1 et $\dim(G)$ coefficients -1. Donc $\det(s) = (-1)^{\dim(G)} = (-1)^{n-\dim(F)}$.

Si de plus s est une réflexion, alors s est une isométrie. De plus, $\dim(F) = n - 1$ donc $\det(s) = (-1)^{n-(n-1)} = -1$, donc s renverse l'orientation. □

4. C'est-à-dire des symétries orthogonales par rapport à une droite.

V Composition d'isométries

L'objectif de cette partie est d'identifier une transformation obtenue par application de plusieurs isométries successives. Par exemple, que se passe-t-il quand on applique successivement plusieurs rotations ? Des rotations et des réflexions ?

V.1 Orientation

La première information à évaluer, quand on compose des isométries, est l'orientation de la transformation obtenue. Cette information est cruciale et facile à obtenir.

Propriété V.1.
Soient $f_1, \ldots, f_k \in GL(E)$. Posons $h = f_1 \circ \ldots \circ f_k$.

- ▷ *Si un nombre pair de transformations f_i renversent l'orientation, alors h préserve l'orientation.*
- ▷ *Si un nombre impair de transformations f_i renversent l'orientation, alors h renverse l'orientation.*

Preuve : Il ne s'agit que de la règle des signes pour un produit ! On sait que $\det(h) = \det(f_1) \cdots \det(f_k)$. Si un nombre impair de transformations f_i renversent l'orientation, alors un nombre impair de réels $\det(f_i)$ sont négatifs, donc $\det(h)$ est négatif, donc h renverse l'orientation. De même pour le deuxième cas. □

Exemple V.2.
Les applications de $GL_1(\mathbb{R})$ sont exactement les réels non nuls. On retrouve la règle des signes habituelle : dans un produit, si un nombre impair de réels est négatif, alors le produit est négatif.

Exemple V.3.
Une composée de deux réflexions préserve l'orientation. Nous verrons donc, que, dans le plan, une composée de 2 symétries axiales est une rotation ; dans l'espace, une composée de 2 symétries orthogonales par rapport à un plan est une rotation autour d'un axe.

Un cas particulier important de composition d'isométries est la conjugaison. Deux endomorphismes conjugués sont "de même nature" ; dans le cas des isométries, deux isométries conjuguées par des isométries sont encore des isométries de même nature.

Remarque V.4.
Pour tous f, $h \in GL(E)$, l'application $h \circ f \circ h^{-1}$ a le même déterminant que f, donc préserve l'orientation si et seulement si f la préserve.

Précisons l'exemple des symétries orthogonales.

Propriété V.5.
Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $F \subset E$ et $h \in \mathcal{O}(E)$ une ***isométrie****. Alors $h \circ s \circ h^{-1}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $h(F)$.*

Preuve : La transformation s est la symétrie d'axe F parallèlement à $F^\perp$. Comme vu au premier chapitre, $h \circ s \circ h^{-1}$ est la symétrie d'axe $h(F)$ parallèlement à $h(F^\perp)$. Mais h préserve le produit scalaire, donc $\langle h(x), h(y)\rangle = \langle x, y\rangle = 0$ pour tous $x \in F$ et $y \in F^\perp$, donc (en prenant en compte la dimension) $h(F^\perp) = h(F)^\perp$, et $h \circ s \circ h^{-1}$ est bien la symétrie orthogonale par rapport à $h(F)$. □

V.2 Isométries du plan

À partir de maintenant, sauf mention du contraire, on se restreint à E un plan euclidien, muni d'une base orthonormée $\mathscr{B}$. Le groupe $\mathcal{O}(E)$ est bien connu.

Propriété V.6.

Les isométries de E qui préservent l'orientation (i.e. les éléments du groupe $SO(E)$) sont les rotations[5] *d'angle $\theta \in [0, 2\pi)$.*

Les isométries de E qui renversent l'orientation (i.e. les éléments de $\mathcal{O}(E) \setminus SO(E)$, qui n'est pas un groupe) sont les symétries axiales par rapport à une droite vectorielle.

Preuve : Il s'agit là encore du cours de L2. □

Nous noterons, par la suite :

- ▷ r_θ la rotation d'angle[6] θ ;
- ▷ s_Δ la symétrie axiale par rapport à la droite vectorielle Δ.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base orthonormée de E. On peut écrire les matrices de rotations et de symétries axiales dans cette base. **Ces propriétés sont à savoir retrouver.**

Propriété V.7.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice de la rotation r_θ dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Preuve : L'image du vecteur e_1 fait un angle θ avec e_1, et a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$.

L'image du vecteur e_2 fait un angle $\frac{\pi}{2} + \theta$ avec e_1, et a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$. □

Propriété V.8.

Soit Δ une droite vectorielle, et $\varphi \in [0, \pi)$ l'angle orienté entre e_1 et cette droite. La matrice de la symétrie axiale s_Δ dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}.$$

Preuve : L'image du vecteur e_1 fait un angle 2φ avec e_1, et a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$.

L'image du vecteur e_2 fait un angle $\varphi - (\frac{\pi}{2} - \varphi) = 2\varphi - \frac{\pi}{2}$ avec e_1, et a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} \sin(2\varphi) \\ -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$. □

On peut vérifier au passage que les rotations ont bien un déterminant de 1 (théorème de Pythagore), et les symétries axiales ont un déterminant de -1.

5. Nous incluons dans celle-ci l'identité, qui est la rotation d'angle 0.

6. Il y a là une subtilité : l'angle dépend de la base orthonormée choisie ! Il y a un choix possible, entre sens trigonométrique ou horaire, pour mesurer les angles orientés.

V.3 Compositions d'isométries du plan

Les matrices sont assez peu pratiques pour analyser une composition d'isométries du plan : le risque est de voir apparaître de longues expressions trigonométriques. Par exemple, l'identité $r_{\theta+\theta'} = r_\theta \circ r_{\theta'}$ est déjà équivalente aux formules d'addition. Nous allons adopter une approche plus géométrique.

Propriété V.9.

Soient $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$. Posons $h = f_1 \circ \ldots \circ f_k$.

- ▷ *Si un nombre impair de transformations f_i sont des symétries axiales, alors h est une symétrie axiale.*
- ▷ *Si un nombre pair de transformations f_i sont des symétries axiales, alors h est une rotation.*

De plus, on peut identifier une symétrie axiale (vectorielle) ou une rotation (vectorielle) en connaissant seulement un point et son image !

- ▷ Si f est une rotation vectorielle, alors son angle est l'angle orienté $xOf(x)$.
- ▷ Si f est une symétrie axiale vectorielle et $f(x) \neq x$, alors son axe est la médiatrice du segment $[xf(x)]$. Si $f(x) = x$, alors son axe est la droite $\mathrm{Vect}(x)$.

Ainsi, on peut procéder en deux temps : tout d'abord utiliser l'orientation pour déterminer la nature d'une composée de transformations, puis calculer l'image d'un point bien choisi pour spécifier ses paramètres (angle ou droite).

Exercice 10. Rappelons que l'on note r_θ la rotation d'angle θ est s_Δ la symétrie axiale d'axe Δ. Décrivez géométriquement les transformations suivantes :

- ▷ $r_\theta \circ r_{\theta'}$;
- ▷ $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$;
- ▷ $s_\Delta \circ r_\theta$;
- ▷ $r_\theta \circ s_\Delta$;
- ▷ $r_{\theta'} \circ r_\theta \circ r_{\theta'}^{-1} = r_{\theta'} \circ r_\theta \circ r_{-\theta'}$;
- ▷ $r_\theta \circ s_\Delta \circ r_\theta^{-1} = r_\theta \circ s_\Delta \circ r_{-\theta}$;
- ▷ $r_\theta \circ s_\Delta \circ r_\theta$;
- ▷ $s_\Delta \circ r_\theta \circ s_\Delta^{-1} = s_\Delta \circ r_\theta \circ s_\Delta$;
- ▷ $s_{\Delta'} \circ s_\Delta \circ s_{\Delta'}^{-1} = s_{\Delta'} \circ s_\Delta \circ s_{\Delta'}$...

Remarque V.10.

En dimension supérieure, cette stratégie devient plus compliquée, pour deux raisons :

- ▷ *Les isométries deviennent plus variées et plus compliquées à décrire. Le fait de préserver ou de renverser l'orientation apporte comparativement peu d'information.*
- ▷ *Il ne suffit plus de calculer l'image d'un seul point pour caractériser une isométrie vectorielle préservant (ou renversant) l'orientation.*

On peut néanmoins avoir encore quelques succès avec cette méthode. Par exemple, dans l'espace, la composée de deux réflexions s_{P_1}, s_{P_2} par rapport à deux plans $P_1 \neq P_2$ est une isométrie $h = s_{P_2} \circ s_{P_1}$ préservant l'orientation, donc une rotation par rapport à un axe. Or $P_1 \cap P_2$ est fixé par s_{P_1} et s_{P_2}, donc par h. L'angle de rotation peut alors se déterminer à l'aide de l'image d'un seul point $x \notin P_1 \cap P_2$; on trouve que cet angle est le double de l'angle orienté de P_1 à P_2.

VI Groupes diédraux

Nous allons étudier des sous-groupes finis de $\mathcal{O}(2)$. Comme déjà évoqué, une façon simple de construire des sous-groupes est d'étudier les éléments d'un groupe *qui préservent une certaine structure*. Dans notre cadre, ce seront les éléments d'un groupe qui préservent [7] un polygone régulier.

Dans toute cette partie, on fixe un entier $N \geq 2$.

VI.1 Définition des groupes diédraux

Soit $P_N \subset \mathbb{R}^2$ un polygone régulier à N côté dont le centre de gravité est 0. Pour la suite, sans perte de généralité :

- ▷ quitte à agrandire ou réduire P_N, ce polygone est de rayon 1, au sens où ses sommets sont sur le cercle unité.
- ▷ quitte à remplacer la base canonique par une autre base orthonormée, $(1,0)$ est un des sommets de P_N.

Alors, si l'on identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, les sommets du polygone P_N sont les racines N-ième de l'unité ; ils ont pour coordonnées $(\cos(\frac{2\pi k}{N}), \sin(\frac{2\pi k}{N}))$ pour $0 \leq k \leq N-1$ (ou, plus proprement, $k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$).

Définition VI.1 (Groupe diédral)**.**

Le groupe diédral D_{2N} est l'ensemble des isométries du plan qui préservent le polygone régulier P_N :

$$D_{2N} = \{f \in \mathcal{O}(2) : \ f(P_N) = P_N\}.$$

Propriété VI.2.

D_{2N} est un sous-groupe de $\mathcal{O}(2)$.

Preuve : De façon élémentaire, $id(P_N) = P_N$, donc $id \in D_{2N}$.

Soient $f,\, g \in D_{2N}$. Alors $f \circ g(P_N) = f(g(P_N)) = f(P_N) = P_N$, donc $f \circ g \in D_{2N}$.

Enfin, soit $f \in D_{2N}$. Alors $f^{-1}(P_N) = f^{-1}(f(P_N)) = f^{-1} \circ f(P_N) = id(P_N) = P_N$, donc $f^{-1} \in D_{2N}$. □

VI.2 Éléments des groupes diédraux

Les éléments de D_{2N} peuvent être de 2 types : des rotations ou des symétries axiales.

Les rotations de D_{2N}, c'est-à-dire les éléments de $D_{2N} \cap SO(2)$, sont les rotations qui envoient le sommet $(1,0)$ sur un autre sommet du polygone P_N. Il y en a exactement N : les rotations d'angle $\frac{2\pi k}{N}$, pour $0 \leq k \leq N-1$. Elles ont pour matrices

$$R_{\frac{2\pi k}{N}} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) & \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \end{pmatrix}.$$

Les symétries axiales de D_{2N} sont les symétries axiales qui envoient le sommet $(1,0)$ sur un autre sommet du polygone P_N. Il y en a exactement N. Leurs axes sont des droites Δ_k formant un angle de $\frac{\pi k}{N}$ avec l'horizontale, pour $0 \leq k \leq N-1$. Elles ont pour matrices

$$S_{\Delta_k} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) & \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) & -\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \end{pmatrix}.$$

7. Ou, plus précisément, l'action sur $\mathbb{R}^2$ préserve.

Géométriquement, la description des symétries axiales dépend de la partié de N :

- ▷ Si N est impair, alors chaque axe de symétrie passe par un et un seul sommet de P_N, ainsi que par le milieu du côté opposé.
- ▷ Si N est pair, alors $N/2$ axes de symétrie passent par deux sommets opposés de P_N, et $N/2$ axes de symétrie passent par deux milieux de côtés opposés de P_N.

Au total, le groupe D_{2N} a $2N$ éléments : N rotations et N symétries axiales. On dit que D_{2N} est d'**ordre** $2N$.

Remarque VI.3.

D_{2N} a un sous-groupe important : le sous-groupe des rotations $D_{2N} \cap SO(2)$, isomorphe au groupe des racines N-ièmes de l'unité ainsi qu'au groupe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Remarque VI.4.

On remarque que D_{2N} a autant de rotations que de symétries axiales. On peut le démontrer directement. Fixons une symétrie axiale, disons $s_{\Delta_0} : (x, y) \mapsto (x, -y)$. Soit φ l'application de D_{2N} dans D_{2N} qui a f associe $s_{\Delta_0} \circ f$. Alors φ est bijective (et est même son propre inverse, car $s_{\Delta_0}^2 = id$), et échange rotations et symétries axiales. Il y a donc autant de rotations que de symétries axiales.

*Un argument similaire permet de démontrer le **théorème de Lagrange** : si G et un groupe fini et H un sous-groupe de G, alors $|H|$ divise $|G|$. Dans notre cadre, le théorème de Lagrange implique que N (le nombre de rotations) divise $|D_{2N}|$.*

VI.3 Générateurs

Notre but reste de comprendre comment calculer efficacement une composée de plusieurs isométries du plan. Le calcule matriciel est faisable, mais fait appel de façons répétée à des formules trigonométriques. On va chercher une méthode plus efficace.

Il reste possible d'utiliser la méthode géométrique générale consistant à déterminer si une composée préserve ou renverse l'orientation, puis à calculer l'image d'un point. Nous allons chercher une méthode plus algébrique.

Pour cela, on va *encoder* les éléments de D_{2N} sous forme de mots. Pour cela, nous distinguons deux transformations :

- ▷ $r = r_{\frac{2\pi}{N}}$, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{N}$.
- ▷ $s = s_{\Delta_0}$, la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.

On peut écrire facilement toute rotation comme itérée de r. En effet, tourner d'un angle $\frac{2\pi k}{N}$, c'est tourner k fois d'un angle $\frac{2\pi}{N}$:

$$r_{\frac{2\pi}{N}} = r^k \quad \forall 0 \leq k \leq N-1.$$

Les symétries demande plus de réflexion. Rappelons que $r_{2\theta} \circ s_\Delta$ est une symétrie d'axe $r_\theta(\Delta)$. Or Δ_k est l'image de Δ_0 par une rotation d'angle $\theta = \frac{\pi k}{N}$, donc $s_{\Delta_k} = r_{\frac{2\pi k}{N}} \circ s_{\Delta_0} = r^k s$.

Pour résumer, les rotations de D_{2N} sont les $(r^k)_{0\le k\le N-1}$ et les symétries axiales les $(r^k s)_{0\le k\le N-1}$. Tout élément de D_{2N} est un composée de r et de s :

$$D_{2N} = \{r^k : \ 0 \le k \le N-1\} \cup \{r^k s : \ 0 \le k \le N-1\}.$$

Plus géométriquement, toute isométrie du polygone P_N peut s'obtenir par application répétée de la rotation élémentaire r d'angle $\frac{2\pi}{N}$ et de la symétrie axiale s d'axe Δ_0. On dit que la rotation r et la symétrie axiale s **engendrent** D_{2N}.

Exercice 11. Une rotation seule engendre-t-elle D_{2N} ? Une symétrie axiale seule ?

Exercice 12. Soit D_8 le groupe des isométries préservant un carré. Ce groupe est-t-il engendré par $r_{\frac{\pi}{2}}$ et s_{Δ_0} ?

Exercice 13. Si l'on remplace s par une autre rotation s_{Δ_k}, les deux élements r et s_{Δ_k} engendrent-ils toujours D_{2N} ?

VI.4 Écriture sous forme normale

Composer les rotations est facile : $r^k \circ r^\ell = r^{k+\ell}$. Comme $r^N = id$, on peut remplacer l'exposant $k+\ell$ par son reste modulo N : cela permet d'obtenir un exposant toujours compris entre 0 et $N-1$.

De même, composer s avec elle-même est facile : $s^k \circ s^\ell = s^{k+\ell}$. Comme $s^2 = id$, on peut remplacer l'exposant $k+\ell$ par son reste modulo 2 : cela permet d'obtenir un exposant toujours égale à 0 ou 1.

La difficulté consiste à composer des symétries, ou des rotations et des symétries. La clef est de remarquer que

$$sr = r^{-1}s.$$

On peut donc faire passer s à droite de l'expression, quitte à inverser r :

$$sr^2 = srr = r^{-1}sr = r^{-1}r^{-1}s = r^{-2}s,$$

et plus généralement, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$sr^n = r^{-n}s.$$

Remarquons que D_{2N} est ainsi un exemple de groupe **non commutatif** : r et s sont deux éléments qui ne commutent pas.

Exemple VI.5.

Prenons $N = 5$. Dans le groupe des isométries du pentagone, considérons la transformation obtenue par composition :

$$f = s_{\Delta_3} \circ r_{\frac{6\pi}{5}} \circ r_{-\frac{2\pi}{5}} \circ s_{\Delta_0} \circ s_{\Delta_1} \circ r_{\frac{2\pi}{5}}.$$

On remplace chaque transformation par son expression formelle comme mot en r et s :

$$f = (r^3 s)(r^3)(r^{-1})(s)(rs)(r) = r^3 sr^2 srsr.$$

On fait passer les symboles s vers la droite, en éliminant éventuellement les mots s^2 et r^5 :

$$f = r^3 r^{-2} ssrsr = rs^2 rsr = r^2 sr = r^2 r^{-1} s = rs.$$

On reconnaît la symétrie axiale par rapport à Δ_1.

Remarque VI.6.

On peut encore simplifier la représentation symbolique d'un élément de D_{2N}*, en ne gardant qu'un exposant. Un élément de* D_{2N} *se représente alors par une paire* (k, ℓ)*, où* $k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ *et* $\ell \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*. La multiplication de deux éléments suit alors une loi inhabituelle :*

$$(k, \ell) * (k', \ell') = (k + (-1)^\ell k', \ell + \ell').$$

Exercice 14. Vérifiez directement que la loi ci-dessus est bien une loi de groupe.

Remarque VI.7.

On peut démontrer que toute identité dans D_{2N} *peut se déduire des trois identités*

$$r^N = id, \quad s^2 = id, \quad sr = r^{-1}s.$$

On peut noter cela $D_{2N} = \langle r, s | r^N = id, \ s^2 = id, sr = r^{-1}s\rangle$*. L'expression de droite est une* ***présentation*** *de* D_{2N}*.*